

Nom:			
Groupe :			

Mathématiques

4e secondaireSciences naturelles

Notes de cours - Chapitres 1 et 2 La manipulation d'expressions algébriques et la factorisation Les figures et les solides équivalents

LUNDI	MARDI
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
MERCREDI	EXAMEN

À la fin de ce chapitre, tu dois être en mesure de:

Multiplier des polynômes
Diviser un polynôme par un autre polynôme (avec ou sans reste)
Factoriser des polynômes à l'aide de: Mise en évidence simple (MES) Mise en évidence double (MED) Trinôme PRODUIT-SOMME (TPS) Différence de deux carrés (DDC) Trinôme carré parfait (TCP)
Manipuler des expressions rationnelles ☐ Simplifier des expressions rationnelles ☐ Multiplier et diviser des expressions rationnelles ☐ Additionner et soustraire en trouvant un dénominateur commun
Résolution d'équations du second degré à une variable ☐ à l'aide de la factorisation (a · b = 0) ☐ à l'aide de la complétion du trinôme carré parfait (CTCP) ☐ à l'aide de la formule quadratique
Les figures équivalentes Définition de figures planes équivalentes Définition de solides équivalents

1. La manipulation d'expressions algébriques

1.0 Révision

Addition et soustraction d'expressions algébriques.

a)
$$(3x^2 - 5x + 2) + (6x^2 - x - 1) =$$

b)
$$(5x-4)-(3x+2)=$$

c)
$$(4x^2 - 3x) - (5x^2 + 2x - 1) =$$

d)
$$(2x + 1) - (4x - 5) + (6x + 2) =$$

Multiplication et division d'expressions algébriques.

a)
$$-3x^3 \cdot 2x^2 =$$

b)
$$(12x^4 + 8x^3 - 4x^2) \div 4x =$$

c)
$$3x(4x + 5y) =$$

d)
$$2ab(3a^2 - 6ab) =$$

e)
$$(x + 2)(x - 4) =$$

f)
$$(2x-3)(8x-7) =$$

g)
$$\frac{9x^2 + 9x(x^2 - 3x)}{3x} =$$

h)
$$(3x + 4)^2 =$$

i)
$$(2x - 5)^2 =$$

k)
$$(x + 3)^2 - (2x - 1)(2x + 1) =$$

1.1. La multiplication de polynômes et les identités algébriques

Exemples : Effectue les opérations suivantes.

a)
$$(2a^2 + 7b)^2 =$$

b)
$$\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right)^2 =$$

c)
$$(6y - 4)^2 =$$

d)
$$(ab - 3c)^2 =$$

e)
$$(y - 10)(y + 10) =$$

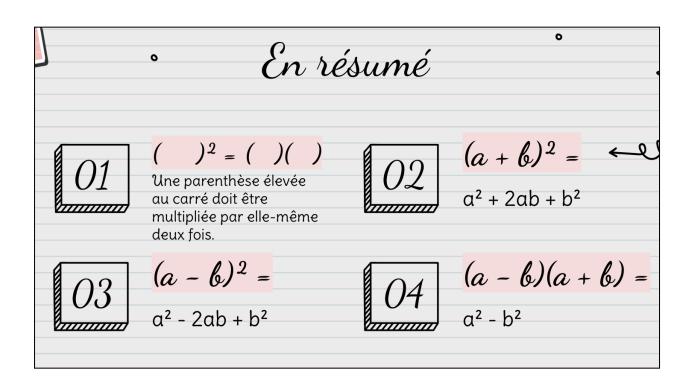
f)
$$(3x + 2)(3x - 2) =$$

Que remarques-tu?

$$(a + b)^2 =$$

$$(a - b)^2 =$$

$$(a - b)(a + b)=$$



1.2. La division de polynômes

Rappel:
$$105 \div 5 =$$

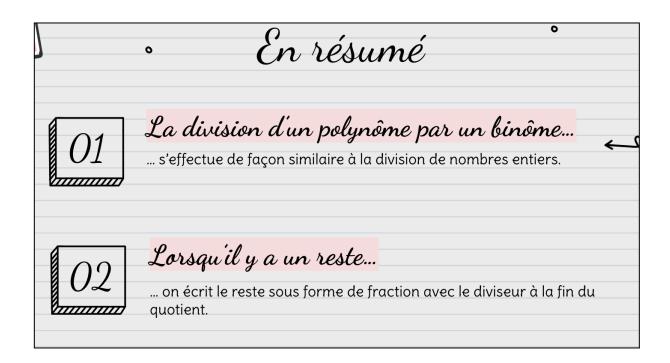
$$106 \div 5 =$$

Exemples:

a)
$$(x^2 + 8x + 15) \div (x + 3) =$$

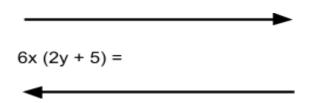
a)
$$(x^2 + 8x + 15) \div (x + 3) =$$
 b) $(6x^2 + 26x - 20) \div (3x - 2) =$

c)
$$(6x^3 - 15x^2 - 2x + 4) \div (2x - 1) =$$
 d) $(12x^2 + 4x - 10) \div (2x + 3) =$

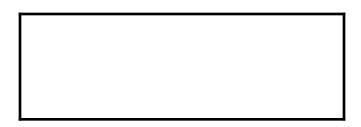


2. La factorisation

> Factoriser un polynôme revient à écrire celui-ci comme un produit de polynômes premiers. Par exemple :



> Factoriser revient aussi à trouver les dimensions d'un rectangle dont l'aire est donnée par le polynôme à factoriser.



➤ Il existe plusieurs techniques de factorisation, voici les principales qui seront utilisées dans le cours.

2.1. La simple mise en évidence (MES)

Factorise le polynôme $6x^2y + 8x^3$ à l'aide de la simple mise en évidence.

Exemples: Factorise les expressions suivantes à l'aide de la mise en évidence simple.

a)
$$6x^3 + 10xy + 2x^2 =$$

b)
$$24x^2y - 32xy^2 + 8xy =$$

c)
$$4x^2 + 8x^3 =$$

2.2. La mise en évidence double (MED)

La mise en évidence double s'applique seulement aux polynômes à quatre termes¹.

Factorise le polynôme $x^2 - ax + bx - ab$ à l'aide d'une mise en évidence double.

¹ En fait, il est possible d'effectuer une mise en évidence double dès que l'expression à factoriser a un nombre pair de termes, mais en 4e secondaire, nous ne traiterons que les cas à quatre termes.

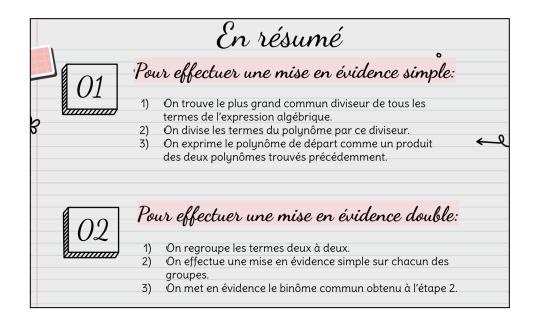
Exemples: Factorise les polynômes suivants.

a)
$$6xy + 4x + 9y + 6 =$$

b)
$$6x^2 - 9x - 4bx + 6b =$$

c)
$$8ab + 4b + 2a + 1 =$$

d)
$$60x^2 - 45x + 20xy - 15y$$



2.3. La factorisation d'un trinôme de la forme $ax^2 + bx + c$ (TPS)

Activité de découverte

- a) Quelle est la forme développée de (x + 2)(x + 3)?
- b) Si la réponse avait été $x^2 + 7x + 6$, quelle aurait été la forme factorisée ?
- c) Si la réponse avait été $x^2 + 7x + 12$, quelle aurait été la forme factorisée ?

d) Si la réponse avait été $x^2 + 14x + 24$, quelle aurait été la forme factorisée ?

e) Si la réponse avait été $x^2 + 10x - 24$, quelle aurait été la forme factorisée ?

f) Si la réponse avait été $x^2 - x - 12$, quelle aurait été la forme factorisée ?

g) Si la réponse avait été $2x^2 + 11x + 12$, quelle aurait été la forme factorisée ?

h) Si la réponse avait été $6x^2 + 11x + 3$, quelle aurait été la forme factorisée ?

i) Si la réponse avait été $3x^2 + 10x + 8$, quelle aurait été la forme factorisée ?

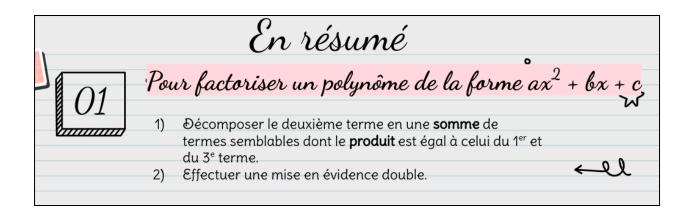
Exemples: Factorise les trinômes suivants.

a)
$$3x^2 - 11x - 4 =$$

b)
$$x^2 - 7x + 10 =$$

c)
$$2x^2 + 48x - 360 =$$

d)
$$3x^2 + 18xy + 27y^2 =$$



2.4. La différence de deux carrés (DDC)

Effectue l'opération suivante à l'aide d'une identité remarquable :

$$(x^2 + 3y)(x^2 - 3y) =$$

Exemples: Factorise les expressions algébriques suivantes.

a)
$$9x^2 - 49y^2 =$$

b)
$$49x^2y^2 - 25z^4 =$$

c)
$$3x^2 - 48 =$$

d)
$$16x^2 + 25 =$$

e)
$$x^2 - 1 =$$

f)
$$x^{16} - 64y^6 =$$

g)
$$(x-1)^2 - 4 =$$

h)
$$9 - (x + 5)^2 =$$

En résumé



Pour factoriser un polynôme à l'aide de la différencez de deux carrés, il faut...

- 1) Extraire la racine carrée de chacun des deux termes.
- 2) Écrire le produit de deux binômes dont l'un représente la somme des racines et l'autre la différence des racines.



2.5. Le trinôme carré parfait (TCP)

Effectue l'opération suivante à l'aide d'une identité remarquable :

$$(2x + 3y)^2 =$$

Exemples: Factorise les expressions suivantes.

a)
$$x^2 + 4x + 4 =$$

b)
$$9y^2 - 24y + 16 =$$

c)
$$4x^2 - 40x + 25 =$$

d)
$$4x^2 + 15x + 9 =$$

e)
$$x^4 + 18x^2 + 81 =$$

f)
$$16x^6 - 8x^3y + 4y^2 =$$

En résumé

01

Pour factoriser un trinôme carré parfait, il faut...

- 1) Extraire la racine carrée du 1er et du 3e terme.
- 2) Écrire les racines comme une somme ou une différence élevée au carré. Le <u>signe</u> du binôme est le même que celui du terme central du trinôme.

$$a^2 - 20a + 100 = (\alpha - 10)^2$$

0

3. Les expressions rationnelles

Une expression rationnelle est une expression algébrique exprimée sous la forme d'un **rapport de polynômes**.

Par exemple, $\frac{3x+4}{2x-1}$ est une expression rationnelle.

3.1. La simplification d'expressions rationnelles

On peut parfois avoir à réduire des expressions rationnelles complexes dans le but d'effectuer des opérations sur celles-ci.

Soit l'expression rationnelle $\frac{x^2+6x-40}{x^2-4x}$. Simplifie cette expression rationnelle.

Exemples: Simplifie les expressions rationnelles suivantes.

a)
$$\frac{6x-12}{x-2} =$$

b)
$$\frac{y^2 + 4y}{y^2 + y - 12} =$$

c)
$$\frac{2x^2-8}{x^2+5x-14} =$$

En résumé



On peut parfois avoir à réduire des expressions rationnelles complexes dans le but d'effectuer des opérations sur celles-ci.



Pour simplifier une expression rationnelle, il faut...

- 1) Si possible, factoriser le numérateur et le dénominateur de l'expression.
- 2) Poser les restrictions.
- 3) Annuler les facteurs qui sont communs au numérateur et au dénominateur.

3.2. Multiplication et division d'expressions rationnelles

3.2.1 Révision: opérations sur les fractions

Multiplication

Pour multiplier des fractions, il faut simplifier un numérateur avec un dénominateur, puis multiplier les numérateurs ensemble et les dénominateurs ensemble.

Exemples:

a)
$$\frac{15}{18} \cdot \frac{24}{40} =$$

b)
$$\frac{84}{135} \cdot \frac{50}{105} =$$

Division

Pour diviser des fractions, il faut changer la division en multiplication et inverser la fraction qui suit le signe de division. Par la suite, on effectue la multiplication.

Exemples:

a)
$$\frac{3}{5} \div \frac{24}{40} =$$

b)
$$\frac{8}{15} \div \frac{40}{105} =$$

3.2.2 Opérations avec des expressions rationnelles

Exemples : Exprime le résultat des opérations suivantes sous forme simplifiée.

a)
$$\frac{4x^2 + x}{4x^2 + 12x + 9} \bullet \frac{8x^2 + 10x - 3}{16x^3 - x} =$$

b)
$$\frac{x^2 - 4x - 21}{2x^2 + 7x + 3} \div \frac{2x - 8}{2x + 1} =$$

En résumé

01

Pour multiplier ou diviser des expressions rationnelles, il suffit de:

- 1) Factoriser les numérateurs et les dénominateurs.
- 2) Simplifier les facteurs communs au numérateur et au dénominateur et effectuer l'opération.

3.3. Addition et soustraction d'expressions rationnelles

3.3.1 Révision: opérations sur les fractions

Pour additionner et soustraire des fractions il faut effectuer les étapes suivantes:

- 1- Simplifier les fractions individuellement, si possible;
- 2- Trouver un dénominateur commun;
- 3- Effectuer l'opération sur les numérateurs;
- 4- Simplifier la fraction trouvée, si possible.



Exemples:

a)
$$\frac{7}{8} + \frac{5}{8} =$$

b)
$$\frac{7}{8} + \frac{14}{24} =$$

c)
$$\frac{33}{36} - \frac{1}{3} =$$

d)
$$\frac{65}{80} - \frac{14}{32} =$$

Exemple: Effectue les opérations suivantes en tenant compte des restrictions.²

a)
$$\frac{7x-1}{3x+5} + \frac{4x+9}{3x+5} =$$

b)
$$\frac{12x+4}{x-7} - \frac{9x-2}{x-7} =$$

² Exercices tirés du cahier Point de mire 4

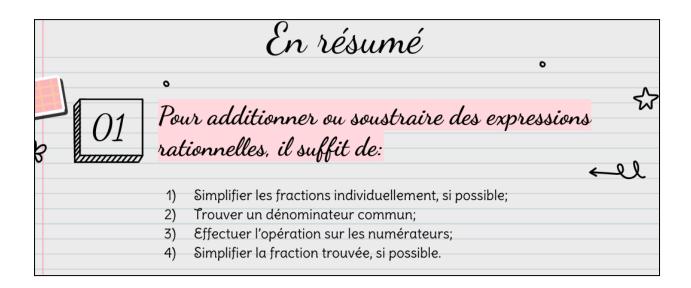
c)
$$\frac{22x-6}{2(4x-1)} - \frac{11x-17}{4x-1} =$$

d)
$$\frac{6x}{4x-1} + \frac{2x+6}{7x} =$$

e)
$$\frac{6x+8}{4x} - \frac{-7x+9}{4x(5x-2)} =$$

f)
$$\frac{x-5}{3x-4} + \frac{13x^3 + 37x^2}{18x^3 - 24x^2} =$$

g)
$$\frac{x+1}{x^2+8x+12} + \frac{3}{2x+4} =$$



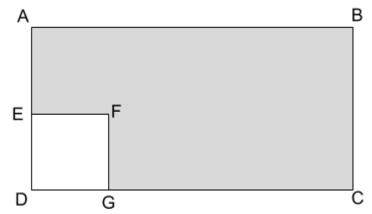
4. La résolution d'équations du second degré

4.1. La résolution d'équations du second degré par factorisation

Situation : Le rectangle ABCD ci-dessous a une aire de 3 500 m². Le quadrilatère DEFG est un carré.

$$m\overline{AE} = 30 m$$

$$m\overline{GC} = 50 m$$



Détermine la mesure d'un côté du carré.

- > Tout d'abord, formons une équation qui peut être associée à cette situation.
 - a) Quel est le degré de cette équation?
 - b) Sommes-nous en mesure de la résoudre et de trouver la valeur de x avec les méthodes apprises en 2e et 3e secondaire?

Pour résoudre une équation de degré 2 à l'aide de la factorisation, il faut :

- b) Écrire l'équation sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$.
- c) Factoriser le membre non-nul de l'équation.

- d) Se servir de la propriété qui dit que si $a \bullet b = 0$, alors a = 0 ou b = 0 pour déterminer les solutions possibles.
- Donc, la mesure d'un côté du carré vaut _____m .

En résumé							
01	Créer une équation selon le contexte	02	Ecrire l'équation sous la forme $\alpha x^2 + bx + c = 0$				
03	Factoriser le membre non-nul de l'équation	04	Se servir de la propriété Si $a \cdot b = 0$, alors $a = 0$ ou $b = 0$				
05	Si nécessaire, rejeter une des solutions.		pour déterminer les solutions possibles				

Exemples: Résous les équations suivantes.

a)
$$x^2 + 16x + 15 = 0$$

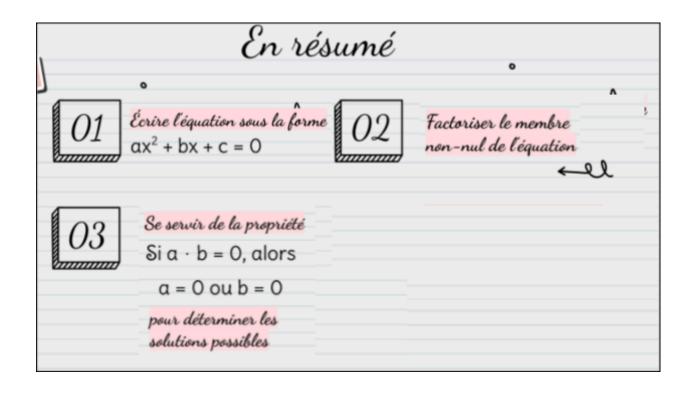
b)
$$4x^2 = 26x$$

c)
$$(3x + 2)(2x - 3) = -3x^2 - 11x - 7$$

d)
$$x^2 - 16 = 0$$

e)
$$-3x^2 = 5 + 8x$$

f)
$$x(x + 2) - 4 = 5x$$



4.2. Résolution par la complétion du trinôme carré parfait

On utilise cette méthode lorsqu'il est difficile d'appliquer la méthode de PRODUIT-SOMME dans la résolution d'une équation.

On voudra alors créer un trinôme carré parfait avec les termes en x^2 et x pour ensuite pouvoir isoler l'inconnue.

Exemples: Résous les équations suivantes.

a)
$$x^2 + 2x - 5 = 0$$

b)
$$x^2 + 10x - 20 = 0$$

c)
$$3x^2 + 12x - 21 = 0$$

d)
$$3x^2 - 4x - 6 = 0$$

e)
$$\frac{1}{2}x^2 + 6x = 2$$

4.3 La résolution d'équations du second degré à l'aide de la formule quadratique

À l'aide de la complétion du trinôme carré parfait, il est possible de déterminer une formule
qui permet de résoudre des équations de la forme ax² + bx + c = 0.

$$ightharpoonup$$
 Cette formule est : $x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ où $\Delta = b^2 - 4ac$

Exemples : Détermine le nombre de solutions, puis, si possible, résous les équations suivantes.

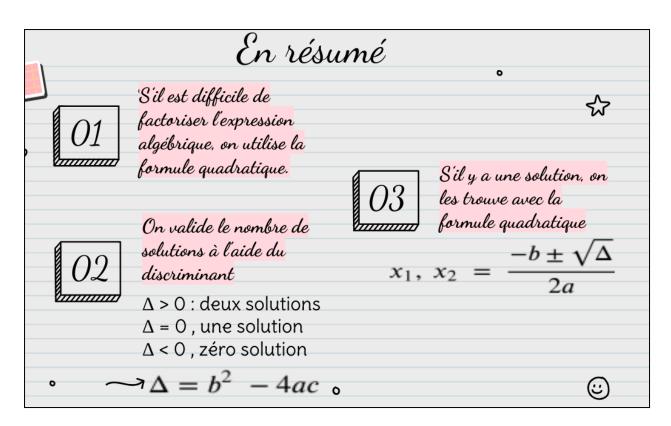
a)
$$4x^2 - x - 20 = 0$$

b)
$$3a^2 = 4a + 6$$

c)
$$\frac{1}{2}x^2 + 6x = 2$$

d)
$$9y^2 - 30y + 25 = 0$$

e)
$$2x^2 - 3x + 4 = 0$$

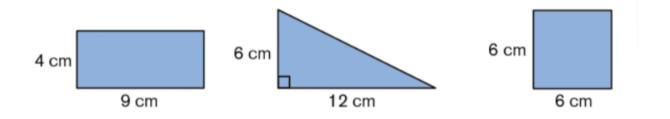


5. Les figures et les solides équivalents

5.1. Les figures planes équivalentes

Des figures planes sont équivalentes si et seulement si elles ont la même aire.

Par exemple, les trois figures ci-dessous sont équivalentes.

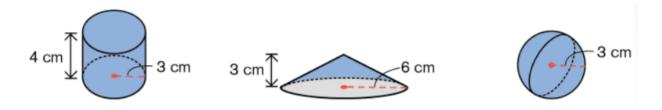


Exemple : Soit un carré ayant une mesure de côté de 12 cm. Détermine la hauteur d'un trapèze dont les bases mesurent 20 cm et 16 cm, et qui est équivalent à ce carré.

5.2. Les solides équivalents

Des solides sont équivalents si et seulement s'ils ont le même volume.

Par exemple, les trois solides ci-dessous sont équivalents.



Exemple : Soit une demi-boule ayant un rayon de 2 cm. Quelle doit être le diamètre d'un cône ayant une hauteur de 2 cm afin qu'il soit équivalent à la demi-boule?

6. La résolution de problème algébrique

1. Le carré et le rectangle illustrés ci-dessous sont équivalents. Chaque côté du carré mesure (x) cm. L'aire du rectangle est de ($2x^2 - 7x - 30$) cm².

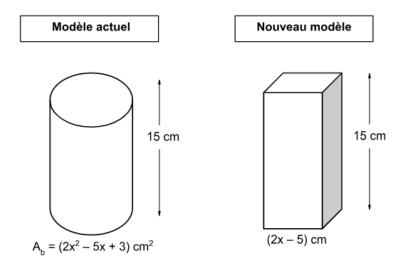


Quel est le périmètre du rectangle? Exprimez votre résultat sous forme numérique.

Laissez les traces de votre démarche.

 Une compagnie qui fabrique du sel de table désire moderniser les contenants de son produit. Le contenant actuel est de forme cylindrique et, pour des raison d'entreposages, la compagnie préfère que les nouveaux modèles soient de la forme d'un prisme à base carrée.

Voici une représentation du modèle actuel et du nouveau modèle de contenants.



- L'aire de la base du cylindre est de $(2x^2 5x + 3)$ cm² et sa hauteur est de 15 cm.
- La mesure d'un côté de la base carrée du prisme est de (2x 5) cm et sa hauteur est de 15 cm.
- Le cylindre et le prisme à base carrée sont équivalents.

Détermine, sous forme numérique, la différence entre la mesure du rayon du modèle actuel et la mesure du côté de la base du nouveau modèle.

Exercices

Section 1.2 : Division de polynômes

1. Effectue les divisions suivantes.

a)
$$2x^2 + 9x - 18$$
 $x + 6$ b) $15x^2 - x - 9$

$$x + 6$$

b)
$$15x^2 - x - 9$$

$$3x - 2$$

c)
$$8x^2 - 10x - 42$$

$$2x-6$$

c)
$$8x^2 - 10x - 42$$
 $2x - 6$ d) $x^3 + 3x^2 + 4x + 16$ $x + 3$

$$x + 3$$

- 2. Exprime le périmètre de chacun des rectangles suivants à l'aide d'un polynôme.
- a)

$$2x - 1 \qquad A = 8x^2 + 2x - 3$$

Périmètre:

b)

$$A = 3x^2 - 5x - 12$$

Périmètre:

3. Effectue les divisions suivantes.

a)
$$(98x - 88 - 44x^2 + 15x^3) \div (5x^2 - 8x + 22)$$

b)
$$(6x^2 + xy - 9x - y^2 + 3y) \div (3x - y)$$

Section 2.2 : Mise en évidence double

1. Gabriel et Hans possèdent chacun un terrain de forme rectangulaire dont les dimensions sont représentées par des polynômes.

Informations concernant le terrain de Gabriel

$$A = (6xy - 15x + 4y - 10) m^{2}$$
 (2y - 5) m

Dans cette situation, x > y

Informations concernant le terrain de Hans

$$A = (9xy + 12y - 6x - 8) m^2$$

Hans fait l'affirmation suivante:

« Même si on ne connaît pas les mesures numériques de nos terrains, la longueur de mon terrain mesure exactement 2 mètres de plus que celle du terrain de Gabriel. »

Hans a-t-il raison?

2. La base rectangulaire d'un prisme droit mesure (2x - 1) dm sur (7x - 14) dm. Si le prisme a un volume de $(84x^3 - 182x^2 + 14x + 28)$ dm³, quelle est sa hauteur?

- 3. Dans chaque cas, trouve l'expression algébrique qui représente la mesure demandée.
- a) Losange

$$A = (4x^2 + 14x + 12) \text{ cm}^2$$

$$D = (4x + 6) cm$$

$$d = ?$$

b) Trapèze

$$A = (21x^2 - 2x - 3) \text{ cm}^2$$

$$B = (8x - 4) cm$$

$$b = (6x - 2) cm$$

h=?

Section 2.4 : Différence de deux carrés

1. Factorisez les binômes suivants.3

a)
$$3xy - 18y^2 =$$

b)
$$x^2 - 25 =$$

c)
$$3x^2 - 3 =$$

d)
$$49x^2 - 25y^2 =$$

e)
$$18 + 36ab =$$

f)
$$100 - 64y^2 =$$

g)
$$49x^2 - 1 =$$

h)
$$500x^2 - 20 =$$

i)
$$75y^2 - 3 =$$

j)
$$2 - 8y^2 =$$

³ Exercices tirés du document "Carnet de factorisation" de Jean-Michel Panet

Section 2.5: Trinôme carré parfait

1. Factoriser les expressions algébriques suivantes.

a)
$$x^2 + 2x + 1 =$$

b)
$$4x^2 - 4x + 1 =$$

c)
$$4x^2 - 12xy + 9y^2 =$$

d)
$$x^2 + 14x + 49 =$$

e)
$$4x^4 + 20x^2 + 25 =$$

f)
$$x^2 + x + \frac{1}{4} =$$

2. Quelle constante doit être ajoutée afin que le trinôme devienne un carré parfait?

a)
$$x^2 + 2x + ?$$
 b) $x^2 - 6x + ?$ c) $x^2 + 5x + ?$

b)
$$x^2 - 6x + 3$$

c)
$$x^2 + 5x + ?$$

d)
$$x^2 - 7x + ?$$

d)
$$x^2 - 7x + ?$$
 e) $49x^2 + 84x + ?$ f) $9x^2 + 12x + ?$

f)
$$9x^2 + 12x + 3$$

Révision avant le test de connaissance

Factoriser chacune des expressions suivantes.

a)	$a^2 + 18a + 81 =$	b)	$b^2 + 2b - 99 =$	c)	$16c^2 - 24c + 9 =$
d)	$d^2 - 2500 =$	e)	$6e^2 - 5e - 6 =$	f)	$4a^3 + 28a^2 - 9a - 63 =$
g)	$g^2 - 14g + 49 =$	h)	$h^2 - 81 =$	i)	$25i^2 + 60i + 36 =$
j)	jk + 3j + 5k + 15 =	k)	mn - 2n + 7m - 14 =	I)	$2x^2 + 14x - 120 =$
m)	$250x^2 - 810 =$	n)	$4x^2 - 17x + 4 =$	0)	$x^4 - 20x^2 + 64 =$

Section 3.3 Addition et soustraction d'expressions rationnelles

1. Effectuez les additions et les soustractions suivantes, puis simplifiez les réponses, s'il y a lieu, sans oublier d'indiquer les restrictions.⁴

a)
$$\frac{1}{x-3} + \frac{x+1}{x^2-9} =$$

b)
$$\frac{3x-6}{x^2-4x+4} - \frac{x}{x^2-4} =$$

c)
$$\frac{a}{2a-1} + \frac{a+1}{2a^2-3a+1} =$$

d)
$$\frac{1}{b^2-25} - \frac{b}{b^2+5b} =$$

e)
$$\frac{2x}{3x-2} + \frac{3x}{3x+2} - \frac{4x}{9x^2-4} =$$

f)
$$\frac{25-5x}{x^2-25} + \frac{x}{x+5} =$$

⁴ Tiré du cahier Puissance 4 SN

Section 4.2 Complétion du trinôme carré parfait

1. Résous les équations suivantes par la complétion du trinôme carré parfait.

a)
$$x^2 + 2x - 1 = 0$$

b)
$$x^2 + 4x = 7$$

c)
$$x^2 = -10x - 20$$

d)
$$14x^2 + 22x + 15 = 12$$

e)
$$3x^2 + 9x + 8 = 3$$

f)
$$-2x^2 + 5x - 12 = -13$$

g)
$$-2x^2 + 60x + 300 = 350$$
 h) $0.5x^2 - 30x = -250$

h)
$$0.5x^2 - 30x = -250$$

i)
$$x^2 + 4.3x + 3.52 = 0$$

j)
$$4x^2 = -2, 4x + 3, 64$$