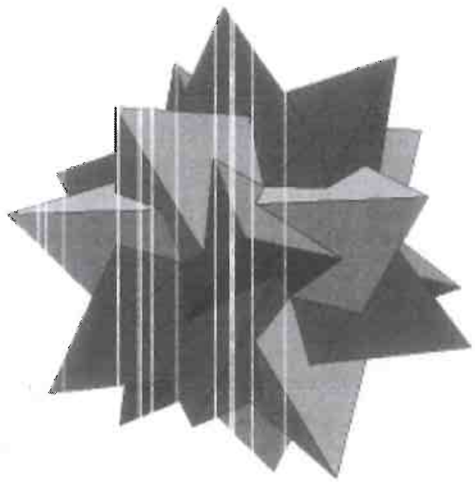
CONJECTURES

~NOTES DE COURS ET EXERCICES~



Sujet des conjectures dans le document

1 : Géométrie
2 : Équation d'une droite
3 : Trigonométrie
4 : Fonction exponentielle
5 : Relation métriques
6 à 10 : Géométrie analytique
11 : Statistiques

MATHÉMATIQUE CST- 4E SECONDAIRE
COLLÈGE REGINA ASSUMPTA
2018 – 2019

NOM : Meggie
GROUPE : ___

1- <u>Conjectures</u>

Une conjecture est un énoncé mathématique qui n'a pas encore été démontré formellement. Cela peut aussi être une supposition basée sur des apparences ou des intuitions.

Pour démontrer qu'une conjecture est vraie, il faut faire une démonstration algébrique rigoureuse. Toutefois, il suffit de trouver un seul contre-exemple pour prouver que la conjecture est fausse.

<u>Conjecture vs Théorème</u>

Un théorème est une conjecture qui a été rigoureusement prouvée.

Par exemple :

- le théorème de Pythagore;
- les formules d'aire d'un triangle.

Il existe encore des conjectures qui n'ont pas encore été démontrées.

Par exemple

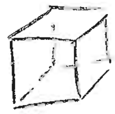
- la Conjecture de Goldbach

Pour formuler une conjecture, il faut construire des exemples variés qui respectent toutes les contraintes. Habituellement, il faut un minimum de **<u>trois</u>** exemples.

Exercices

Conjecture 1

Formuler une conjecture décrivant la relation qui existe entre le nombre des sommets, le nombre de faces et le nombre d'arêtes d'un solide.

Exemple 1 : 

* cube

nb sommets : 8

nb faces : 6

nb arêtes : 12

$8+6-2=12$

* tester des solides différents

Exemple 2 : 

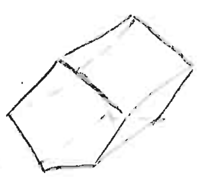
* pyramide à base carrée

nb sommets : 5

nb faces : 5

nb arêtes : 8

$5+5-2=8$

Exemple 3 : 

prisme à base pentagonale

nb sommets : 10

nb faces : 7

nb arêtes : 15

$10+7-2=15$

Conjecture : Dans tout solide (polyèdre), le nb d'arêtes est égal à deux de moins que la somme du nb de sommets et de faces. $\boxed{A = F+S-2}$

Conjecture 2 : La pente et les coordonnées à l'origine

(?, 0)

Émettez une conjecture sur la valeur de l'abscisse à l'origine de droites ayant une ordonnée à l'origine représentant le triple de leur pente.

$b = 2a$

exemple 1 :

$a = 2 \quad b = 3 \times 2 = 6$

$y = 2x + 6$

$0 = 2x + 6$

$-6 = 2x$

$-3 = x$

$(-3, 0)$

exemple 2 :

→ Prendre des nbs de différents ensembles de nombres ($\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$)

$a = -5 \quad b = 3 \times -5 = -15$

$y = -5x - 15$

$0 = -5x - 15$

$15 = -5x$

$-3 = x$

$(-3, 0)$

exemple 3 :

$a = \frac{3}{4} \quad b = 3 \times \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$

$y = \frac{3}{4}x + \frac{9}{4}$

$0 = \frac{3}{4}x + \frac{9}{4}$

$-\frac{9}{4} = \frac{3}{4}x$

$-3 = x$

$(-3, 0)$

Conjecture : Lorsque l'ordonnée à l'origine représente le triple de la pente, l'abscisse à l'origine est toujours -3

Conjecture 3 : Des angles complémentaires

Deux angles sont complémentaires si la somme de leurs mesures est de 90°.

Formuler une conjecture décrivant le lien entre la valeur du sinus d'un angle aigu et la valeur du cosinus de son angle complémentaire.

exemple 1 :

$m\angle A = 40°$ $m\angle B = 90 - 40 = 50°$

$\sin 40° \approx 0{,}6428$

$\cos 50° \approx 0{,}6428$

exemple 2 :

$m\angle A = 35{,}5°$ $m\angle B = 90 - 35{,}5 = 54{,}5°$

$\sin 35{,}5° \approx 0{,}5807$

$\cos 54{,}5° \approx 0{,}5807$

exemple 3 :

$m\angle A = 88°$ $m\angle B = 90 - 88 = 2°$

$\sin 88° \approx 0{,}9994$

$\cos 2° \approx 0{,}9994$

Conjecture : La valeur du sinus d'un angle est équivalent à la valeur du cosinus de son angle complémentaire.

Conjecture 4 : La résolution

Alain décide de modifier ses habitudes de vie afin d'améliorer sa santé. Entre autres, il voudrait améliorer sa capacité cardio-respiratoire. Il décide de faire du jogging sur place, activité qu'il pratiquera deux fois par semaine, en augmentant progressivement la durée de l'exercice. Voici son plan : durant une semaine, il fera une minute de jogging à chaque séance. La semaine suivante, chaque séance durera deux minutes. À la troisième semaine, il fera quatre minutes de jogging par séance, et ainsi de suite.

Émettez une conjecture sur la capacité d'Alain à respecter son programme. Ton raisonnement doit s'appuyer sur le modèle mathématique représentant cette situation et tu dois fournir des exemples.

$y = a \cdot c^x$

1) Représenter la situation

Nb de semaines	1	2	3	4	...
durée de la course (min)	1	2	4	8	...

modèle exponentiel $\times 2$

2) Trouver la règle

1) Paramètre c

$c = \frac{4}{2} = 2$

2) Paramètre a

$y = a \cdot 2^x$

$2 = a \cdot 2^2$

$2 = 4a$

$\frac{1}{2} = a$

$y = \frac{1}{2} \cdot 2^x$

3) Durée de l'entrainement

a) Après 8 semaines

$y = \frac{1}{2} \cdot 2^x$

$= \frac{1}{2} \cdot 2^8$

$= 128$ min

$= 2h08$

b) Après 10 semaines

$y = \frac{1}{2} \cdot 2^x$

$y = \frac{1}{2} \cdot 2^{10}$

$= 512$ min

8h32

c) Après 12 semaines

$y = \frac{1}{2} \cdot 2^{12}$

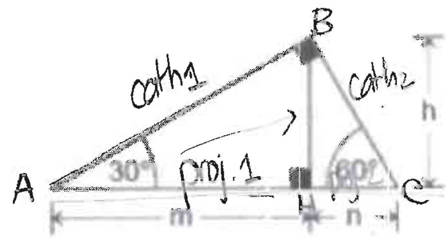
$= 2048$

$= 34h08$

Conclusion : Rapidement, la durée de son entrainement est impossible à respecter (plus d'une journée).

Conjecture 5 : Hauteur relative à l'hypoténuse   ouffff !

Les angles aigus d'un triangle rectangle sont complémentaires. Un des angles aigus mesure 30 ° et l'autre mesure donc 60 °. Émettez une conjecture sur le rapport des mesures des projections des cathètes ~~sur l'hypoténuse~~.



exemple 1

si $m+n=20u$

1) $m\overline{BC} = \frac{1}{2} \cdot m\overline{AC}$
$= \frac{1}{2} \cdot 20$
$= 10u$

2) $m\overline{AB} = \sqrt{20^2 - 10^2}$
$\approx 17{,}32$

3) $m\overline{BH} = \frac{1}{2} m\overline{AB}$
$= \frac{1}{2} \cdot 17{,}32$
$\approx 8{,}66$

4) $m = \sqrt{17{,}32^2 - 8{,}66^2}$
$m \approx 15u$

5) $n = 20 - 15 = 5u$

6) $\frac{m}{n} = \frac{15}{5} = 3$

ou

$\frac{n}{m} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

exemple 2

si $m+n = 100{,}5u$

1) $m\overline{BC} = \frac{1}{2} \cdot m\overline{AC}$
$= \frac{1}{2} \cdot 100{,}5$
$= 50{,}25u$

2) $m\overline{AB} = \sqrt{100{,}5^2 - 50{,}25^2}$
$\approx 87{,}04$

3) $m\overline{AH}$
$cath_1^2 = hyp \cdot proj_1$
$87{,}04^2 = 100{,}5 \cdot proj$
$m\overline{AH} = 75{,}375$

4) $m\overline{HC}$
$n = 100{,}5 - 75{,}375$
$= 25{,}125$

5) $\frac{25{,}125}{75{,}375} = \frac{1}{3}$

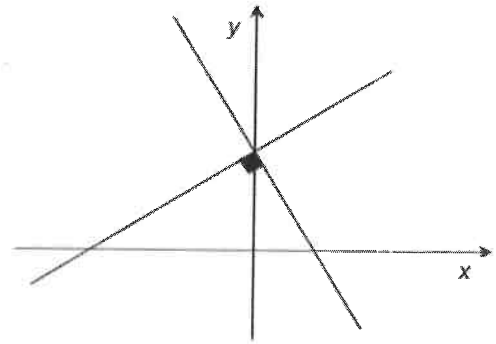
ou

3

exemple 3

Conjecture 6 : Le produit des abscisses à l'origine

On s'intéresse au produit des abscisses à l'origine de deux droites perpendiculaires ayant la même ordonnée à l'origine.



Formuler une conjecture décrivant le lien qui existe entre le produit des abscisses à l'origine de deux droites perpendiculaires et la valeur de leur ordonnée à l'origine.

exemple 1

Équation 1re dte :

$y = 3x + 5$

Équation 2e dte :

$y = -\frac{1}{3}x + 5$

Abscisse 1 :

$0 = 3x + 5$

$-5 = 3x$

$-\frac{5}{3} = x$

Abscisse 2 :

$0 = -\frac{1}{3}x + 5$

$-5 = -\frac{1}{3}x$

$15 = x$

Produit des abscisses

$-\frac{5}{3} \cdot 15 = -25$

exemple 2

Équation 1re dte :

$y = -5x + \frac{1}{2}$

Équation 2e dte :

$y = \frac{1}{5}x + \frac{1}{2}$

Abscisse 1 :

$0 = -5x + \frac{1}{2}$

$-\frac{1}{2} = -5x$

$\frac{1}{10} = x$

Abscisse 2 :

$0 = \frac{1}{5}x + \frac{1}{2}$

$-\frac{1}{2} = \frac{1}{5}x$

$-\frac{5}{2} = x$

Produit des abscisses :

$\frac{1}{10} \times -\frac{5}{2} = -\frac{1}{4}$

exemple 3 :

Équation 1re dte :

$y = -\frac{3}{4}x - 10$

Équation 2e dte :

$y = \frac{4}{3}x - 10$

Abscisse 1 :

$0 = -\frac{3}{4}x - 10$

$10 = -\frac{3}{4}x$

$-\frac{40}{3} = x$

Abscisse 2 :

$0 = \frac{4}{3}x - 10$

$10 = \frac{4}{3}x$

$\frac{30}{4} = x$

Produit des abscisses :

$-\frac{40}{3} \times \frac{30}{4} = -100$

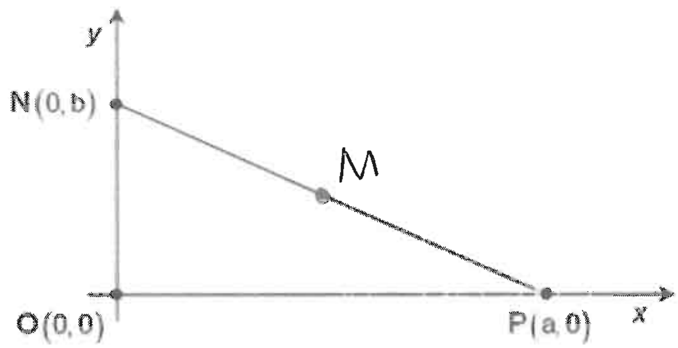
Lorsque deux droites sont perpendiculaires et qu'elles ont la même ordonnée à l'origine, le produit des abscisses est l'opposé du carré de l'ordonnée à l'origine : $-b^2$.

Conjecture 7 : Le milieu de l'hypoténuse

a) À l'aide du logiciel *Geogebra*, émettez une conjecture sur la distance entre le point milieu de l'hypoténuse et les sommets du triangle rectangle.

La distance entre le pt milieu de l'hypoténuse et chacun des 3 sommets du Δ rectangle est la même.

b) On représente un triangle rectangle NOP dans le plan cartésien.



À l'aide du triangle NOP, prouver la conjecture que vous venez de démontrer à l'aide d'une démonstration algébrique.

1) Coordonnées du pt milieu

$x_m = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{0+a}{2} = \frac{a}{2}$

$y_m = \frac{y_1+y_2}{2} = \frac{b+0}{2} = \frac{b}{2}$

$M\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$

2) d(M,O)

$+\frac{a}{2}$ $(0,0)$ $+\frac{b}{2}$
$\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$

$d(M,O) = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$

$= \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}}$

3) d(N,M)

$+\frac{a}{2}$ $(0,b)$ $-\frac{b}{2}$
$\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$

$d(N,M) = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$

$= \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{-b}{2}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}}$

4) d(M,P)

$+\frac{a}{2}$ $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ $-\frac{b}{2}$
$(a,0)$

$d(M,P) = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$

$= \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{-b}{2}\right)^2}$

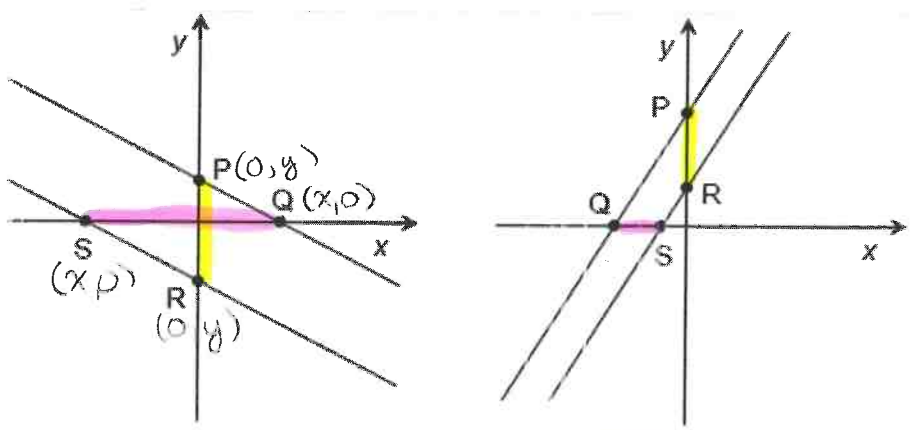
$= \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}}$

Conjecture 8 : Deux segments de droite et une pente

Dans un plan cartésien,

- Les droites obliques PQ et RS sont parallèles et distinctes;
- Les points P et R sont des points de l'axe des *y*;
- Les points Q et S sont des points de l'axe des *x*.

Voici deux représentations graphiques du type de droites décrit ci-dessus.



Formuler une conjecture décrivant le lien entre le rapport $\frac{m\overline{PR}}{m\overline{QS}}$ et la pente de la droite PQ pour ce type de droites.

Exemple 1

$y = 2x + 5$ (dte PQ)

$y = 2x - 4$ (dte SR)

a) Coordonnées de P

$y = 2x + 5$

$= 2 \cdot 0 + 5$

$= 5$ P(0,5)

b) Coordonnées de Q

$y = 2x + 5$

$0 = 2x + 5$

$-\frac{5}{2} = x$

$Q\left(\frac{-5}{2}, 0\right)$

c) Coordonnées S

$y = 2x - 4$

$0 = 2x - 4$

$2 = x$

S(2,0)

d) Coordonnées R

$y = 2x - 4$

$y = 2 \cdot 0 - 4$

$y = -4$

R(0,-4)

e) d(P,R)

$d(P,R) = 5 - -4 = 9$

f) d(S,Q)

$d(S,Q) = 2 - -\frac{5}{2} = \frac{9}{2}$

g) Rapport

$\frac{m\overline{PR}}{m\overline{QS}} = \frac{9}{9/2} = 2$

Exemple ②

$y=-3x-\frac{1}{2}$ (dte PQ)

$y=-3x+\frac{1}{3}$ (dte SR)

a) Coordonnées P

$y=-3x-\frac{1}{2}$

$=-3\cdot0-\frac{1}{2}$

$=-\frac{1}{2}$

$P(0,-\frac{1}{2})$

b) Coordonnées Q

$y=-3x-\frac{1}{2}$

$0=-3x-\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}=-3x$

$-\frac{1}{6}=x$

$Q(-\frac{1}{6},0)$

c) Coordonnées S

$y=-3x+\frac{1}{3}$

$0=-3x+\frac{1}{3}$

$-\frac{1}{3}=-3x$

$\frac{1}{9}=x$

$S(\frac{1}{9},0)$

d) Coordonnées R

$y=-3x+\frac{1}{3}$

$y=-3\cdot0+\frac{1}{3}$

$y=\frac{1}{3}$

$R(0,\frac{1}{3})$

e) d(R,P)

$\frac{1}{3}--\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$

f) d(S,Q)

$\frac{1}{9}--\frac{1}{6}=\frac{5}{18}$

g) Rapport

$\frac{m\overline{PR}}{m\overline{QS}}=\frac{5/6}{5/18}=3$

Exemple ③

$y=-\frac{2}{5}x-4$ (dte PQ)

$y=-\frac{2}{5}x-3$ (dte SR)

a) Coordonnée P

$y=-\frac{2}{5}x-4$

$y=-\frac{2}{5}\cdot0-4$

$y=-4$

$P(0,-4)$

b) Coordonnée Q

$y=-\frac{2}{5}x-4$

$0=-\frac{2}{5}x-4$

$4=-\frac{2}{5}x$

$-10=x$

$Q(-10,0)$

c) coordonnée S

$y=-\frac{2}{5}x-3$

$0=-\frac{2}{5}x-3$

$3=-\frac{2}{5}x$

$\frac{-15}{2}=x$

$S(\frac{-15}{2},0)$

d) Coordonnée R

$y=-\frac{2}{5}x-3$

$y=-\frac{2}{5}\cdot0-3$

$y=-3$

$R(0,-3)$

e) d(R,P)

$-3--4=1$

f) d(Q,S)

$\frac{-15}{2}--10=\frac{5}{2}$

g) Rapport

$\frac{m\overline{PR}}{m\overline{QS}}=\frac{1}{5/2}=\frac{2}{5}$

Conjecture:
Le rapport $\frac{m\overline{PR}}{m\overline{QS}}$ est l'inverse et opposé de la pente des droites.

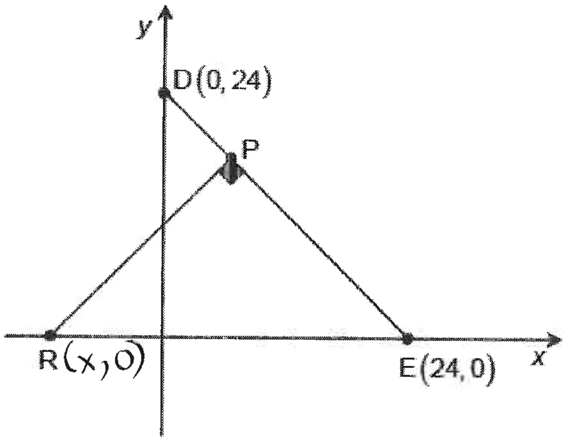
Conjecture 9 : Des coordonnées

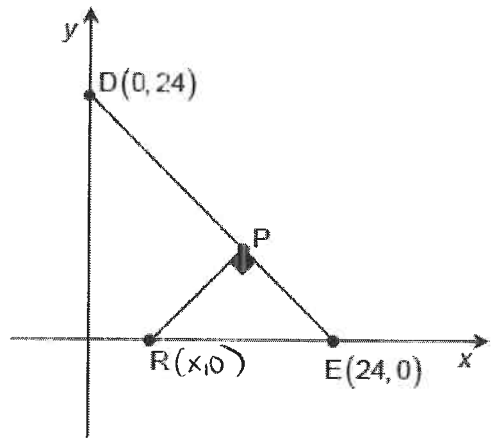
Géométrie analytique

Dans le plan cartésien,

- on trace le segment de droite DE dont les coordonnées des extrémités sont $D(0, 24)$ et $E(24, 0)$;
- on choisit un point P parmi les points du segment de droite DE, P n'étant pas une des extrémités du segment DE;
- on trace le segment de droite PR perpendiculaire au segment DE et dont l'extrémité R est l'un des points de l'axe des x.

Voici deux représentations graphiques possibles du type de segments PR décrit ci-dessus.





Formuler une conjecture décrivant le lien existant entre l'abscisse du point R et les coordonnées du point P pour les segments PR décrits ci-dessus.

1) Pente de $\overline{DE}$

$$+24 \begin{pmatrix}(0,24) \\ (24,0)\end{pmatrix} -24$$

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-24}{24} = -1$$

2) Pente de $\overline{PR}$

Comme $\overline{PR} \perp \overline{DE}$,

$a_1 = -1 \quad a_2 = 1$

Exemple ①

si $\frac{a}{b} = \frac{1}{4}$

1) Coordonnées de P

$x_p = x_1 + \frac{a}{b}(x_2 - x_1)$

$= 0 + \frac{1}{4}(24 - 0)$

$= 6$

$y_p = y_1 + \frac{a}{b}(y_2 - y_1)$

$= 24 + \frac{1}{4}(0 - 24)$

$= 18$

P(6,18)

2) Équation de la dte PR

$y = x + b$

$18 = 6 + b$

$12 = b$

$y = x + 12$

3) Coordonnées de R

$y = x + 12$

$0 = x + 12$

$-12 = x$

R(-12,0)

P(6,18)

$x_R = -12$

Exemple ②

si $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$

1) Coordonnées de P

$x_p = x_1 + \frac{a}{b}(x_2 - x_1)$

$= 0 + \frac{2}{3}(24 - 0)$

$= 16$

$y_p = y_1 + \frac{a}{b}(y_2 - y_1)$

$= 24 + \frac{2}{3}(0 - 24)$

$= 8$

P(16,8)

2) Équation dte PR

$y = x + b$

$8 = 16 + b$

$-8 = b$

$y = x - 8$

3) Coordonnées de R

$y = x - 8$

$0 = x - 8$

$8 = x$

R(8,0)

P(16,8)

$x_R = 8$

Exemple ③

si $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$

1) Coordonnées de P

$x_p = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{0+24}{2} = 12$

$y_p = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{0+24}{2} = 12$

P(12,12)

2) Équation dte PR

$y = x + b$

$12 = 12 + b$

$0 = b$

$y = x$

3) Coordonnées de R

$y = x$

$0 = x$

R(0,0)

P(12,12)

$x_R = 0$

L'abscisse du point R est la différence entre l'abscisse et l'ordonnée du point P.

$\boxed{x_R = x_p - y_p}$

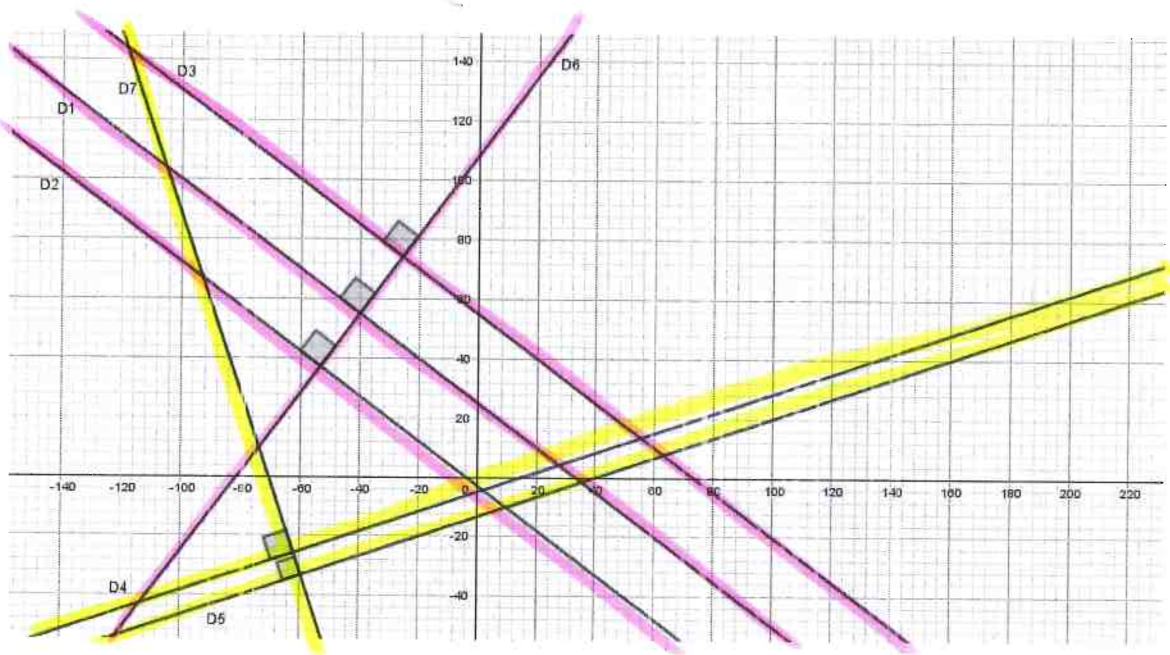
Conjecture 10 : Position relative

Dans le graphique suivant,

Équations des 7 droites

D1: $3x + 4y = 100$
D2: $12x + 16y = -45$
D3: $3x + 4y = 220$
D4: $-x + 3y = -15$
D5: $-x + 3y = -40$
D6: $-4x + 3y - 325 = 0$
D7: $-3x - y = 211.84$

- Ces droites sont parallèles entre elles :
  - D1, D2 et D3
  - D4 et D5
- Ces droites sont perpendiculaires :
  - D6 avec D1, D2 et D3
  - D7 avec D4 et D5
- Ces droites sont sécantes :
  - D6 et D4, D6 et D5, D6 et D7
  - D7 et D2, D7 et D1, D7 et D3



Formule une conjecture permettant de déterminer la position relative (parallèle, perpendiculaire ou sécante) entre deux droites en connaissant leurs équations. Pour t'aider, isole *y* dans chacune des équations.

$d_1 : 3x+4y=100$

$y = \frac{-3x+100}{4}$

$y = \frac{-3}{4}x+25$

$d_2 : 12x+16y=-45$

$y = \frac{-12x-45}{16}$

$y = \frac{-3}{4}x - \frac{45}{16}$

$d_3 : 3x + 4y = 220$

$$y = \frac{-3x + 220}{4}$$

$$y = \frac{-3}{4}x + 55$$

$d_4 : -x + 3y = -15$

$$y = \frac{x - 15}{3}$$

$$y = \frac{x}{3} - 5$$

$d_5 : -x + 3y = -40$

$$y = \frac{x - 40}{3}$$

$$y = \frac{x}{3} - \frac{40}{3}$$

$d_6 : -4x + 3y - 325 = 0$

$$y = \frac{4x + 325}{3}$$

$$y = \frac{4}{3}x + \frac{325}{3}$$

$d_7 : -3x - y = 211{,}84$

$$-3x - 211{,}84 = y$$

Conjecture dtes //:

Lorsque 2 dtes sont parallèles, elles ont le même taux de variation (m pente).

Conjecture dte $\perp$:

Lorsque 2 dtes sont perpendiculaires, leurs pentes sont opposées et inverses.

Conjecture 11 : Deux nouveaux danseurs

Initialement, une troupe comptait 4 danseurs âgés respectivement de 20, 22, 26 et 28 ans.
La moyenne d'âge de ces 4 danseurs était de 24 ans.
L'écart moyen de leurs âges était de 3 ans.

Après un spectacle de promotion, 2 nouveaux danseurs se joignent à cette troupe. Nicolas constate que la moyenne d'âges des 6 danseurs de la troupe est encore de 24 ans.

Nicolas fait l'affirmation suivante : « Puisque la moyenne des âges est inchangée et que le nombre de danseurs augmente, l'écart moyen des âges diminue. »

Selon vous, l'affirmation de Nicolas est-elle vraie ou fausse ? Expliquez pourquoi.

Âge des nouveaux danseurs :

a : 1er danseur
b : 2e danseur

Moyenne des âges :

$$\bar{x} = \frac{20+22+26+28+a+b}{6}$$

$144 = 96 + a + b$

$48 = a + b$

Exemple ①

Si $a = 23$, $b = 48 - 23 = 25$

Données	$\lvert$Écart $\bar{x}\rvert$
20	4
22	2
26	2
28	4
23	1
25	1
Total	14

$\bar{E}.M. = \frac{14}{6} = 2,\bar{3}$

Exemple ②

Si $a = 19$, $b = 48 - 19 = 29$

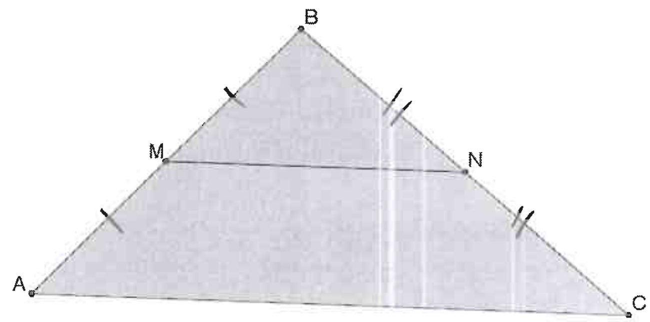
Données	$\lvert$Écart $\bar{x}\rvert$
20	4
22	2
26	2
28	4
19	5
29	5
Total	22

$\bar{E}.M. = \frac{22}{6} = 3,\bar{6}$

Conclusion : L'affirmation est fausse puisque l'écart moyen peut augmenter (voir exemple 2) ou diminuer (voir exemple 1).

Démonstration 1 : Côtés parallèles

On considère le triangle ABC représenté ci-contre. Les points M et N sont les milieux respectifs du segment AB et du segment BC. Montre que le segment MN est parallèle au côté AC.



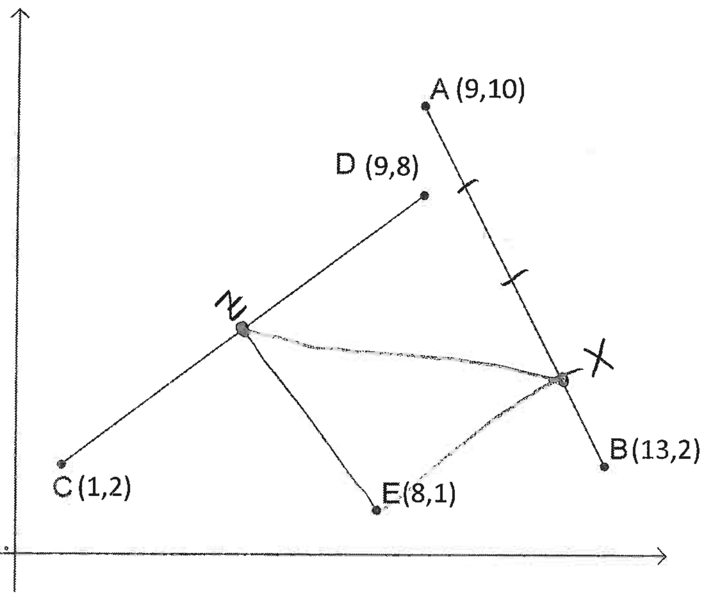
hypothèses : M est le milieu de AB
N est le milieu de BC

Conclusion : $\triangle ABC \sim \triangle MBN$

AFFIRMATIONS	JUSTIFICATIONS
1- $\dfrac{m\overline{MB}}{m\overline{AB}} = \dfrac{1}{2}$	1- Rapport des côtés homologues
2- $\angle MBN \cong \angle ABC$	2- ∠ appartenant aux 2 Δ.
3- $\dfrac{m\overline{BN}}{m\overline{BC}} = \dfrac{1}{2}$	3- Rapport des côtés homologues
4- $\triangle ABC \sim \triangle MBN$	par le cas de similitude CAC
5- $\angle BMN \cong \angle BAC$	Les angles homologues de Δ semblables sont ≅.
6- $MN \parallel AC$	Si deux angles correspondants sont ≅, alors les deux côtes formant ces ∠ sont //.

Démonstration 2 : Triangle rectangle isocèle

On considère le graphique ci-contre. Le point X est situé au quart du segment AB à partir de B. Le point Z est situé au milieu du segment CD. Montre que le triangle EXZ est rectangle et isocèle.



1) Coordonnées de Z

$$x_Z = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1+9}{2} = 5$$

$$y_Z = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{2+8}{2} = 5$$

$Z(5,5)$

formule du pt milieu entre C et D.

2) Coordonnées de X

$B(13,2)$ $A(9,10)$ $\frac{a}{b} = \frac{1}{4}$

$$x_X = x_1 + \frac{a}{b}(x_2 - x_1) = 13 + \frac{1}{4}(9-13) = 12$$

$$y_X = y_1 + \frac{a}{b}(y_2 - y_1) = 2 + \frac{1}{4}(10-2) = 4$$

$X(12,4)$

formule du pt de partage entre A et B.

3) d(X, Z)

$$-7 \left(\begin{matrix} (12,4) \\ (5,5) \end{matrix} \right) +1$$

$$d(X,Z) = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(-7)^2 + (1)^2} \approx 7{,}07$$

formule de la distance entre 2 pts.

4) d(E, Z)

$$-3 \left(\begin{matrix} (8,1) \\ (5,5) \end{matrix} \right) +4$$

$$d(E,Z) = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2} = 5$$

formule de la distance entre 2 pts

5) d(E, X)

$$+4 \left(\begin{matrix} (8,1) \\ (12,4) \end{matrix} \right) +3$$

$$d(E,X) = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

formule de la distance entre 2 pts.

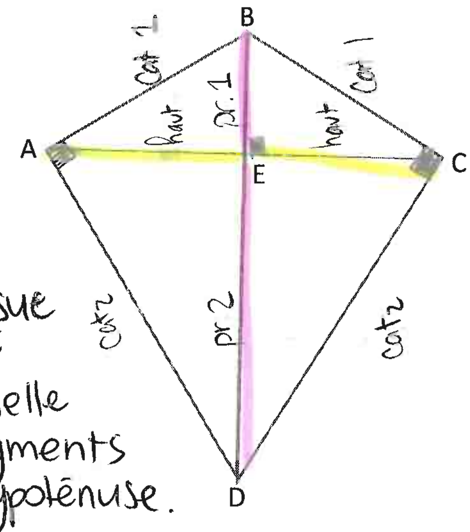
6) Preuve

$d(E,X) = d(E,Z) = 5$

Le Δ est isocèle.

Démonstration 3 : Diagonales d'un cerf-volant

Dans la figure ci-contre, l'angle A et l'angle C mesurent 90°. De plus, le segment AC et le segment BD sont perpendiculaires. Montre que $m\overline{BE} \times m\overline{DE} = m\overline{AE} \times m\overline{CE}$.



1) $\triangle ABD$

$proj_1 \times proj_2 = haut^2$

$m\overline{BE} \times m\overline{ED} = (m\overline{AE})^2$

Ds un $\triangle$ rectangle, la mesure de la hauteur issue du sommet de l'angle droit est moyenne proportionnelle entre les mesures des 2 segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse.

2) $\triangle BCD$

$proj_1 \times proj_2 = haut^2$

$m\overline{BE} \times m\overline{ED} = (m\overline{EC})^2$

même justification qu'à l'étape précédente.

3) Preuve

$m\overline{EB} \times m\overline{ED} = m\overline{EB} \times m\overline{ED}$

$(m\overline{AE})^2 = (m\overline{EC})^2$

$m\overline{AE} = m\overline{EC}$

par substitution

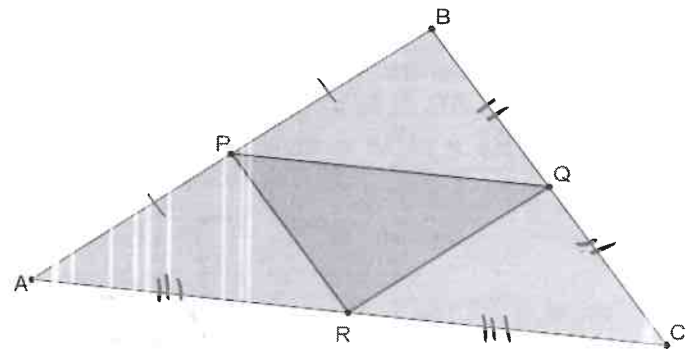
donc

$m\overline{BE} \times m\overline{ED} = m\overline{AE} \times m\overline{AE}$

$m\overline{BE} \times m\overline{ED} = m\overline{AE} \times m\overline{EC}$

Démonstration 4 : Aire de triangles

Dans le triangle ABC, on a tracé les segments PQ, QR et PR. Les points P, Q et R sont les points milieux respectifs de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ et $\overline{AC}$. Montrez que l'aire du triangle PQR est quatre fois plus petite que l'aire du triangle ABC.



1) $\triangle BPQ \sim \triangle ABC$

1- $\frac{m\overline{BP}}{m\overline{AP}} = \frac{m\overline{BQ}}{m\overline{BC}} = \frac{1}{2}$, rapport des côtés homologues

2- $\angle PBQ \cong \angle ABC$, $\angle$ commun aux $2\triangle$.

3- $\triangle BPQ \sim \triangle ABC$, par C-A-C

2- $\triangle APR \sim \triangle ABC$

1- $\frac{m\overline{AP}}{m\overline{AB}} = \frac{m\overline{AR}}{m\overline{AC}} = \frac{1}{2}$, rapport des côtés homologues

2- $\angle PAR \cong \angle BAC$, $\angle$ commun aux $2\triangle$

3- $\triangle APR \sim \triangle ABC$, par C-A-C

3- $\triangle QRC \sim \triangle BAC$

1- $\frac{m\overline{QC}}{m\overline{BC}} = \frac{m\overline{RC}}{m\overline{AC}} = \frac{1}{2}$, rapport des côtés homologues

2- $\angle QCR \cong \angle BCR$, $\angle$ commun aux $2\triangle$

3- $\triangle QRC \sim \triangle BAC$, par A-C-A

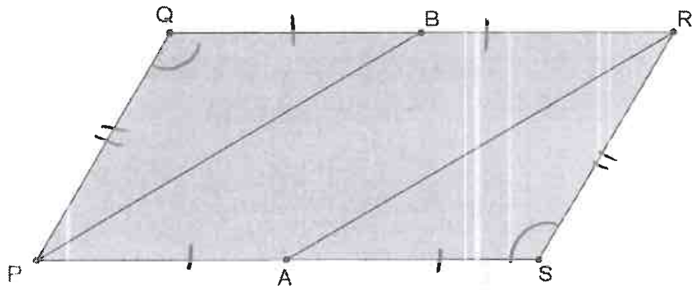
4- Rapport des aires

$k^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

Chacun des $3\triangle$ ci-haut, on un rapport d'aire de $\frac{1}{4}$ avec ... le $\triangle ABC$, le $\triangle PQR$ a donc le même rapport $(1 - 3 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4})$

Démonstration 5 : Segments isométriques

Le quadrilatère PQRS représenté ci-contre est un parallélogramme. A et B sont respectivement les milieux des segments PS et QR. Montre que les segments PB et AR sont isométriques.



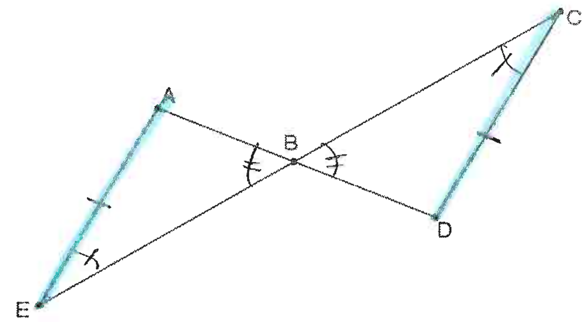
hypothèse: B est le milieu de $\overline{QR}$
A est le milieu de $\overline{PS}$
PQRS est un parallélogramme

Conclusion: $\triangle QBP \cong \triangle ABR$

AFFIRMATIONS	JUSTIFICATIONS
$m\overline{QS} = m\overline{AS}$	les côtés opposés d'un parallélogramme sont $\cong$ et A et B sont le milieu respectif de $\overline{PS}$ et $\overline{QR}$
$\angle Q \cong \angle S$	Les angles opposés d'un parallélogramme sont $\cong$
$m\overline{QP} = m\overline{RS}$	Les côtés opposés d'un parallélogramme sont $\cong$.
$\triangle QBP \cong \triangle ABR$	par le cas d'$\cong$ CAC
$\overline{PB} \cong \overline{AR}$	Les côtés homologues de $\triangle \cong$ sont $\cong$

Démonstration 6 : Point milieu

Soit la figure ci-contre. Sachant que le segment AE est isométrique au segment CD et que le segment AE est parallèle au segment CD, montre que B est le point milieu du segment AD.



hypothèse: $\overline{AE} \cong \overline{CD}$
$\overline{AE} \parallel \overline{CD}$

Conclusion: $\triangle ABE \cong \triangle BDC$

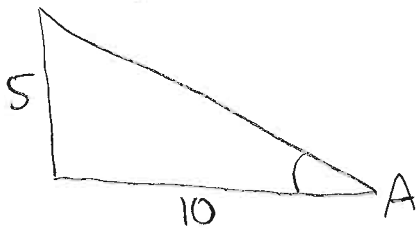
AFFIRMATIONS	JUSTIFICATIONS
$\angle AEB \cong \angle BDC$	Les $\angle$ alt.-internes formés par 2 // sont isométriques.
$\overline{AE} \cong \overline{CD}$	par hypothèse
$\angle EAB \cong \angle BDC$	Les $\angle$ alt.-internes formés par 2 // sont isométriques.
$\triangle ABE \cong \triangle BDC$	par le cas d'$\cong$ A-C-A.
$\overline{AB} \cong \overline{BD}$	Les côtés homologues de $\triangle \cong$ sont $\cong$.

B est donc le pt milieu de AD.

Démonstration 7 : Angle opposé à la cathète

Clémence fait l'affirmation suivante à propos des triangles rectangles : « Lorsqu'on double la longueur d'une cathète d'un triangle rectangle, on double aussi la mesure de l'angle opposé à cette cathète. » Clémence a-t-elle raison? Justifie ta réponse.

exemple (1)



$\tan A = \frac{opp}{adj}$

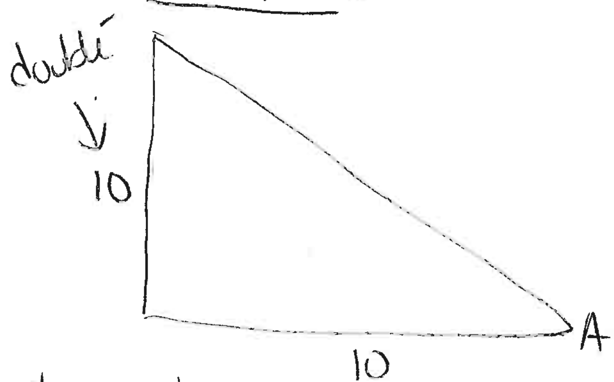
$\tan A = \frac{5}{10}$

$m\angle A = \tan^{-1}\left(\frac{5}{10}\right)$

$\approx 26{,}565$

rapport tangente

exemple (2)



$\tan A = \frac{opp}{adj}$

$\tan A = \frac{10}{10}$

$m\angle A = \tan^{-1}\left(\frac{10}{10}\right)$

$= 45°$

rapport tangente

Vérification

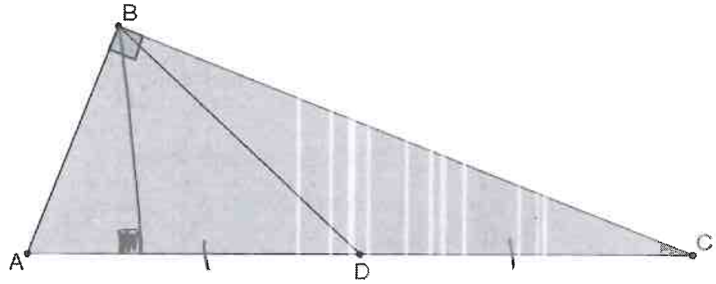
$45 \div 26{,}565 \approx 1{,}7$

Clémence a tort. Dans l'exemple ci-haut, en doublant la cathète, l'angle est multiplié par 1,7.

Démonstration 8 : Triangles de même aire

Louka fait l'affirmation suivante : « Dans un triangle rectangle, lorsqu'on abaisse la médiane issue de l'angle droit, on crée deux triangles qui ont la même aire. » Louka a-t-il raison? Justifie ta réponse.

Exemple de triangle :



Louka a raison, car la formule de l'aire est $\frac{b \times h}{2}$ et dans ce cas, la mesure de la base de chaque triangle est la même (une médiane coupe le côté en son milieu) et la hauteur issue de B est la même pour les 2 △.