LES TRIANGLES

CHAPITRE 3

E

NOTES DE COURS ET EXERCICES

MATHÉMATIQUE CST4
COLLÈGE REGINA ASSUMPTA
2018-2019
MADAME BLANCHETTE

INSPIRÉ DU DOCUMENT DE NOTES DE COURS
DE AUDREY-ANN BOSSÉ (CDSL)

NOM : ______________________________

GROUPE : _____

NOTES DE COURS

1. Rappel sur les angles (énoncés de géométrie)

Angles isométriques : Angles ayant la même mesure.

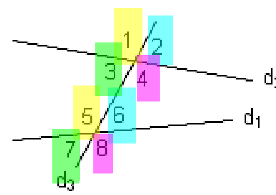
Angles complémentaires : Deux angles dont la somme de leurs mesures donne 90°.

Angles supplémentaires : Deux angles dont la somme de leurs mesures donne 180°.

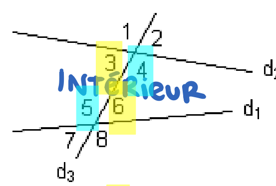
Angles opposés par le sommet : Deux angles ayant le même sommet et dont les côtés de l'un sont les prolongements des côtés de l'autre angle. Les angles opposés par le sommet sont toujours isométriques.

Voici deux droites, d_1 et d_2. La droite d_3 est la sécante à d_1 et d_2, car elle coupe les deux autres droites.

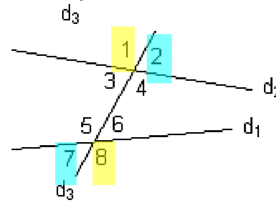
Angles correspondants : Des angles sont correspondants s'ils se trouvent du même côté de la sécante, l'un à l'extérieur et l'autre à l'intérieur des 2 droites coupées par la sécante. Ils n'ont pas le même sommet.



Angles alternes-internes : Angles situés de chaque côté de la sécante mais à l'intérieur des deux droites coupées par la sécante. Ils n'ont pas le même sommet.



Angles alternes-externes : Angles situés de chaque côté de la sécante, mais à l'extérieur des deux droites coupées par la sécante. Ils n'ont pas le même sommet.

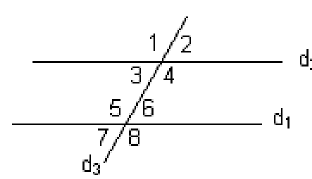


Cas particulier : Deux droites parallèles et une sécante

d_1 et d_2 sont parallèles. d_3 est une sécante à d_1 et d_2.

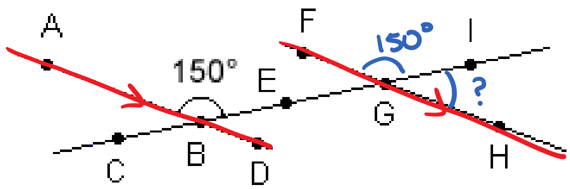
Lorsqu'une sécante coupe deux droites parallèles :

- **les angles correspondants sont isométriques;**
- **les angles alternes-internes sont isométriques;**
- **les angles alternes-externes sont isométriques.**



Exemples :

1. Les droites AD et FH sont parallèles. Quelle est la mesure de l'angle IGH ?



1- $m\angle FGI = m\angle ABE = 150°$, les angles correspondants formés par 2 // et une sécante sont ≅.

parallèles

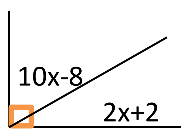
isométriques

2- $m\angle IGH = 180 - m\angle FGI$
$= 180 - 150$
$= 30°$

Les angles sont supplémentaires.

2. Détermine x dans chacun des cas suivants. Justifie chacune de tes réponses.

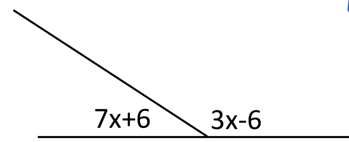
a)



Les angles sont complémentaires.

$$10x - 8 + 2x + 2 = 90$$
$$12x - 6 = 90$$
$$12x = 96$$
$$x = 8°$$

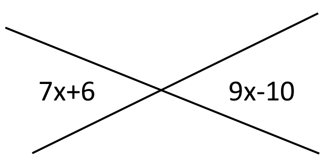
b)



Les angles sont supplémentaires.

$$7x + 6 + 3x - 6 = 180$$
$$10x = 180$$
$$x = 18°$$

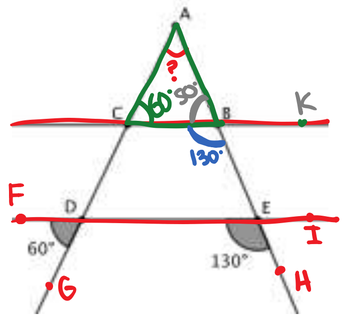
c)



Les angles opposés par le sommet sont ≅.

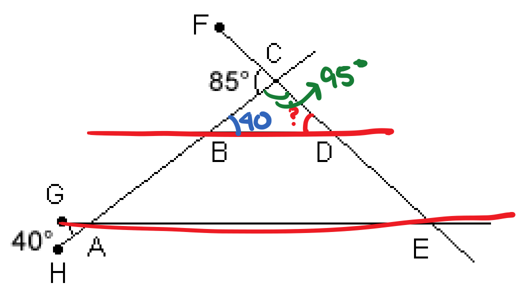
$$7x + 6 = 9x - 10$$
$$-7x + 10 \quad -7x + 10$$
$$16 = 2x$$
$$8° = x$$

3. On considère la figure ci-contre. Sachant que les droites BC et DE sont parallèles, déduis la mesure de l'angle BAC. Justifie chacune de tes réponses.



Mesures d'angles	Justifications
$m\angle ACB = m\angle FDG = 60°$	Les angles alt.-externes formés par 2 // et une sécante sont ≅.
$m\angle CBE = m\angle DEH = 130°$	Les ∠ correspondants formés par 2// et une sécante sont ≅.
$m\angle ABC = 180 - m\angle CBE$ $= 180 - 130$ $= 50°$	Les ∠ sont supplémentaires.
$m\angle CAB = 180 - (m\angle ABC + m\angle ACB)$ $= 180 - (50 + 60)$ $= 70°$	La somme des mesures des ∠ intérieurs d'un Δ est 180°.

4. On considère la situation suivante où les droites BD et AE sont parallèles.



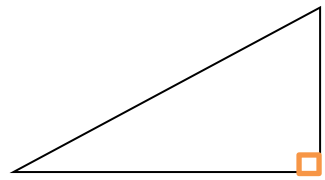
Quelle est la mesure de l'angle BDC ? Justifie chacune de tes réponses.

Mesures d'angles	Justifications
$m\angle CBD = m\angle GAH = 40°$	Les angles alt.-externes formés par 2 // et une sécante sont ≅.
$m\angle BCD = 180 - m\angle FCB$ $= 180 - 85$ $= 95°$	Les angles sont supplémentaires.
$m\angle BDC = 180 - (m\angle CBD + m\angle BCD)$ $= 180 - (95 + 40)$ $= 45°$	La somme des mesures des ∠ intérieurs d'un Δ est 180°.

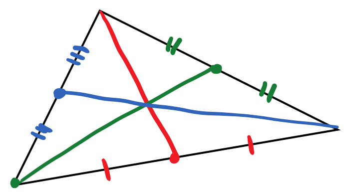
2. Rappel sur les triangles (énoncés de géométrie)

Somme des mesures des angles intérieurs d'un triangle: La somme des mesures des angles intérieurs d'un triangle est de 180°.

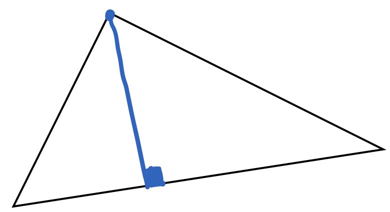
Relation de Pythagore : Dans un triangle rectangle, le carré de la mesure de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des mesures des cathètes.



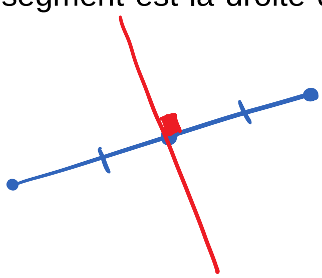
Médiane : La médiane d'un triangle est une droite qui passe par un sommet et coupe le côté opposé en son milieu.



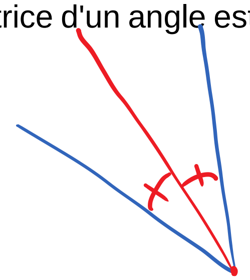
Hauteur : Une hauteur d'un triangle est une droite qui passe par un sommet du triangle et qui coupe son coté opposé en formant un angle droit.



Médiatrice : La médiatrice d'un segment est la droite qui passe par son milieu et qui est perpendiculaire au segment.



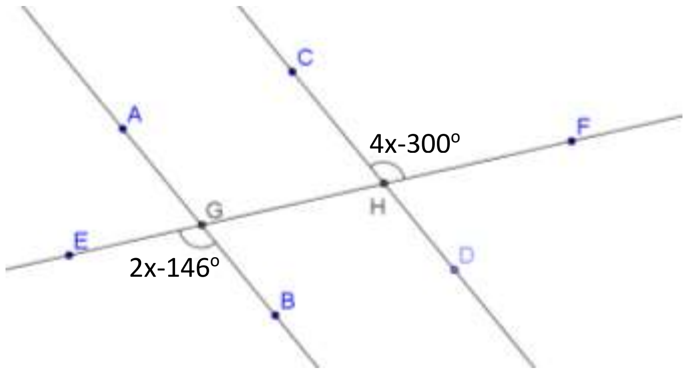
Bissectrice : La bissectrice d'un angle est la demi-droite qui divise un angle en deux angles isométriques.



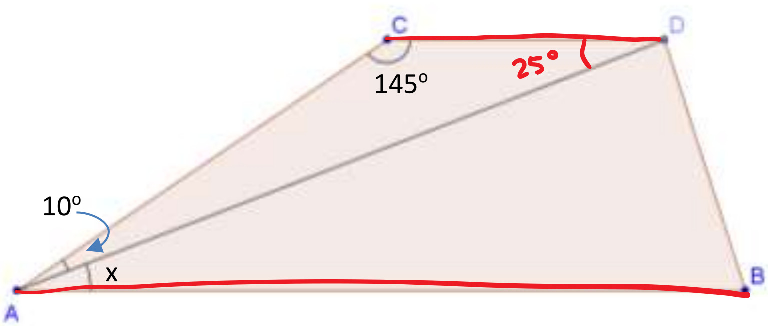
Exemples :

1) Pour chaque figure ci-dessous, trouve les mesures manquantes. N'oublie pas de justifier toutes tes affirmations.

a) Les segments AB et DC sont parallèles.



b) ABDC est un trapèze.



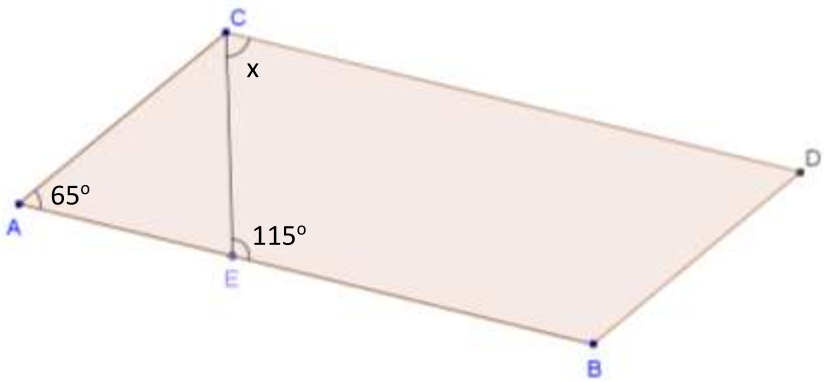
1- $m\angle ADC = 180 - (m\angle DAC + m\angle ACD)$
$= 180 - (10 + 145)$
$= 25°$

La somme des mesures des $\angle$ intérieurs d'un Δ est 180°.

2- $m\angle DAB = m\angle ADC = 25°$

Les angles alt.-internes formés par 2 // et une sécante sont $\cong$.

c) ABDC est un parallélogramme.



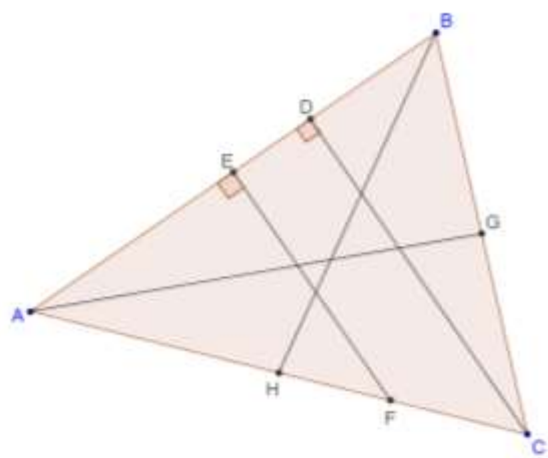
2) Identifie les segments suivants, sachant que E, G et H sont situés au milieu de leur segment respectif.

$\overline{EF}$: médiatrice de $\overline{AB}$

$\overline{DC}$: hauteur issue de C

$\overline{AG}$: médiane issue de A

$\overline{BH}$: médiane issue de B

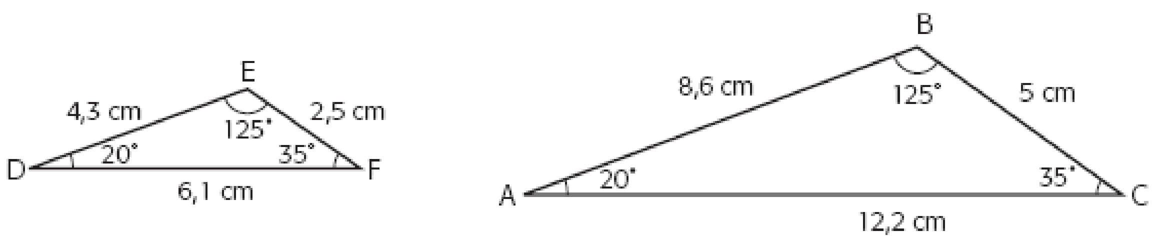


N'oublie pas d'aller consulter ton cahier d'exercices à la page 94 pour un rappel sur les figures semblables!

3. Les triangles semblables

Deux triangles sont semblables lorsque leurs angles homologues sont isométriques et les mesures de leurs côtés homologues sont proportionnelles. Le coefficient de proportionnalité correspond alors au rapport de similitude (k) des deux triangles. Les triangles ABC et DEF ci-dessous sont semblables, car leurs angles homologues sont isométriques et les mesures de leurs côtés homologues sont proportionnelles.

Exemple :



1.	$\angle A \cong \angle D$ ou $m\angle A = m\angle D = 20°$	Les angles sont isométriques.
2.	$\angle B \cong \angle E$	Les angles sont isométriques.
3.	$\angle C \cong \angle F$	Les angles sont isométriques.
4.	$\frac{m\overline{AB}}{m\overline{DE}} = \frac{m\overline{BC}}{m\overline{EF}} = \frac{m\overline{CA}}{m\overline{FD}} = 2 = k$	Rapport des côtés homologues
On conclut alors que $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.		

Remarques :
- Des figures semblables sont isométriques si $k = 1$.
- Le symbole « ≅» se lit « est isométrique à ».
- Le symbole « ~ » se lit « est semblable à.

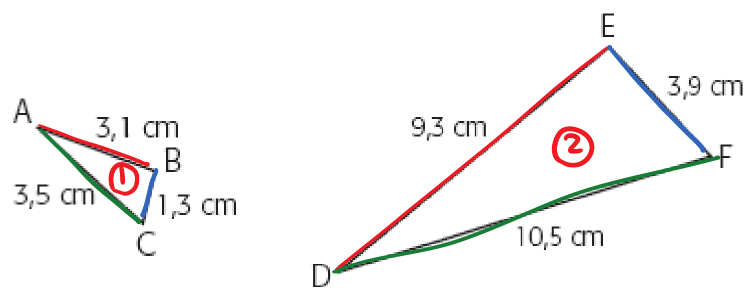
♥ Le symbole d'égalité concerne des nombres alors que le symbole d'isométrie (≅) concerne des objets géométriques. On a donc $m\,\overline{AB} = m\,\overline{DE}$ mais $\overline{AB} \cong \overline{DE}$.

A) Les conditions minimales de similitude de triangles

Pour pouvoir affirmer que deux triangles sont semblables, il suffit de s'assurer que les triangles respectent une des trois conditions minimales suivantes.

1. La condition minimale de similitude C-C-C

Deux triangles dont les mesures des trois côtés homologues sont proportionnelles sont nécessairement semblables.



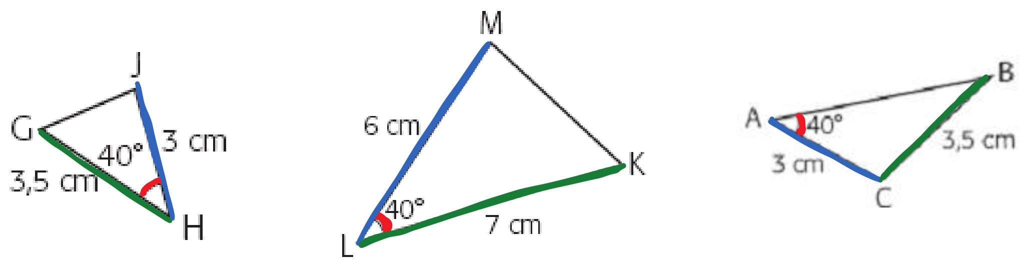
Affirmations	Justifications
$\frac{m\overline{DE}}{m\overline{AB}} = \frac{9{,}3\text{ cm}}{3{,}1\text{ cm}} = 3$	rapport des côtés homologues.
$\frac{m\overline{EF}}{m\overline{BC}} = \frac{3{,}9\text{ cm}}{1{,}3\text{ cm}} = 3$	rapport des côtés homologues.
$\frac{m\overline{DF}}{m\overline{AC}} = \frac{10{,}5}{3{,}5} = 3$	rapport des côtés homologues.
$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	par le cas de similitude CCC

Rapport de similitude : $k = 3$

2. La condition minimale de similitude C-A-C

→ l'angle est obligatoirement entre les 2 côtés.

Deux triangles ayant un angle isométrique compris entre 2 paires de côtés homologues proportionnelles sont semblables.

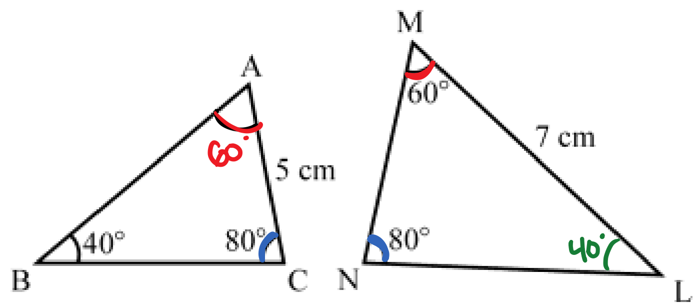


Affirmations	Justifications
$\frac{m\overline{LK}}{m\overline{GH}} = \frac{7}{3,5} = 2$	Rapport des côtés homologues
$\angle GHJ \cong \angle MLK$ ou $m\angle GHJ = m\angle MLK = 40°$	par hypothèse (par le dessin)
$\frac{m\overline{ML}}{m\overline{JH}} = \frac{6}{3} = 2$	Rapport des côtés homologues
$\triangle GHJ \sim \triangle LMK$	par le cas de similitude CAC.

ATTENTION ! Le triangle ABC n'est pas semblable au triangle GHJ, car l'angle de 40° n'est pas compris entre les côtés homologues proportionnels.

3. La condition minimale de similitude A-A

Deux triangles ayant 2 angles isométriques sont semblables.



Affirmations	Justifications
$m\angle A = 180 - (m\angle B + m\angle C)$ $= 180 - (40 + 80)$ $= 60°$	La somme des mesures des $\angle$ intérieurs d'un $\triangle$ est de 180°.
$m\angle A = m\angle M = 60°$	par hypothèse et par calcul.
$m\angle C = m\angle N = 80°$	par hypothèse
$\triangle ABC \sim \triangle MNL$	par le cas de similitude AA.

B) Le raisonnement déductif

On utilise le raisonnement déductif pour démontrer que deux triangles sont semblables. L'**hypothèse** correspond à ce que l'on connait au départ et la **conclusion** correspond à ce que l'on cherche.

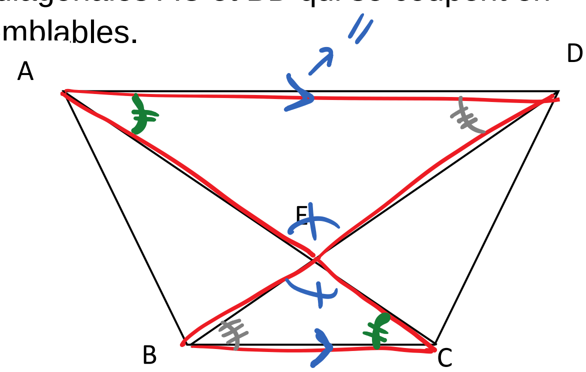
Exemples :

1) Dans le trapèze ABCD ci-contre, on a tracé les diagonales AC et BD qui se coupent en E. Montre que les triangles AED et CEB sont semblables.

CCC
CAC
AA

Hypothèses : ABCD est un trapèze

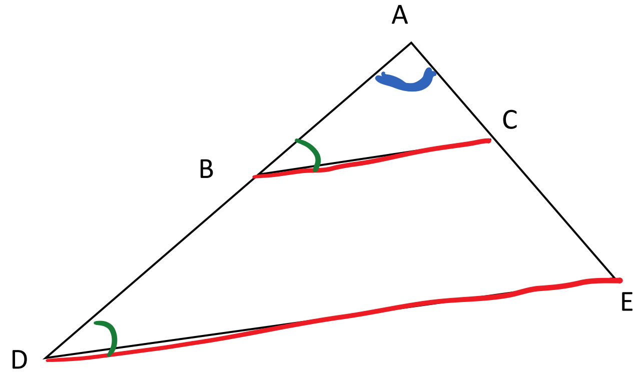
Conclusion : $\Delta AED \sim \Delta CEB$



Affirmations	Justifications
1. $\angle AED \cong \angle BEC$	1. Les angles opposés par le sommet sont $\cong$.
3 ~~2~~. $\angle BCE \cong \angle EAD$	2. Les $\angle$ alternes-internes formés ~~compris~~ entre 2 // sont $\cong$.
2 ~~3~~. $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$	3. Le trapèze a une paire de côtés //.
4. $\Delta AED \sim \Delta CEB$	4. par le cas de similitude AA.

2) Dans la figure ci-contre, les segments BC et DE sont parallèles. Les mesures sont en cm.

Montre que les triangles ABC et ADE sont semblables.



Hypothèses : $\overline{BC} \parallel \overline{DE}$

Conclusion : $\triangle ABC \sim \triangle ADE$

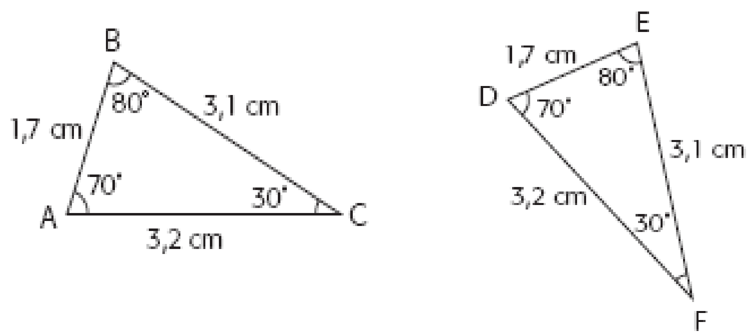
Affirmations	Justifications
1. $\angle A \cong \angle A$ ou $\angle DAC \cong \angle BAC$	1. angle appartenant aux 2 $\triangle$.
2. $\angle ABC \cong \angle ADE$	2. Les angles correspondants formés par 2 // sont $\cong$.
3. $\triangle ABC \sim \triangle ADE$	3. par le cas de similitude A-A.

4. Les triangles isométriques

Deux triangles sont isométriques lorsque leurs éléments homologues (trois angles et trois côtés) sont isométriques.

Les triangles ABC et DEF ci-dessous sont isométriques, car leurs angles homologues sont isométriques et leurs côtés homologues sont isométriques.

Exemple :



1.	$\angle A \cong \angle D$	Les angles sont isométriques.
2.	$\angle B \cong \angle E$	Les angles sont isométriques.
3.	$\angle C \cong \angle F$	Les angles sont isométriques.
4.	$\overline{AB} \cong \overline{DE}$	Les côtés sont isométriques.
5.	$\overline{BC} \cong \overline{EF}$	Les côtés sont isométriques.
6.	$\overline{CA} \cong \overline{FD}$	Les côtés sont isométriques.

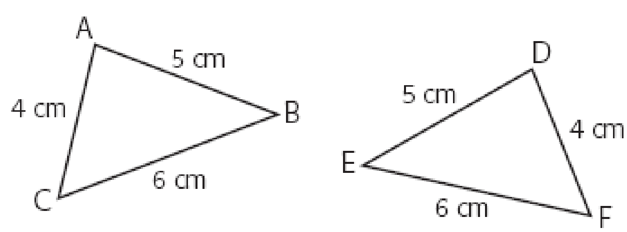
On conclut alors que $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

A) Les conditions minimales d’isométrie de triangles

Pour pouvoir affirmer que deux triangles sont isométriques, il n’est pas nécessaire de vérifier que tous leurs côtés homologues et tous leurs angles homologues sont isométriques. Il suffit de s’assurer que les triangles respectent une des trois conditions minimales suivantes.

1) La condition minimale d’isométrie C-C-C

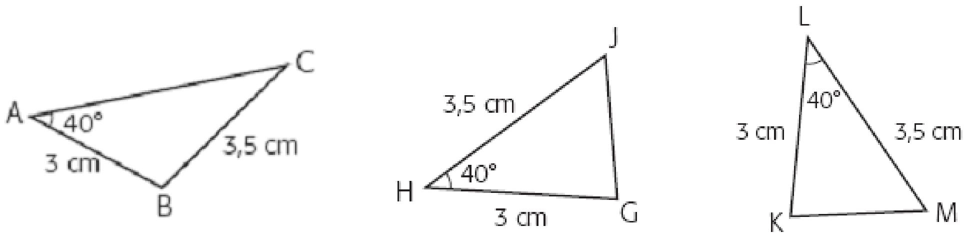
Deux triangles ayant leurs trois côtés homologues isométriques sont isométriques.



1.		
2.		
3.		
4.		

2) La condition minimale d'isométrie C-A-C

Deux triangles ayant un angle isométrique compris entre des côtés homologues isométriques sont isométriques.



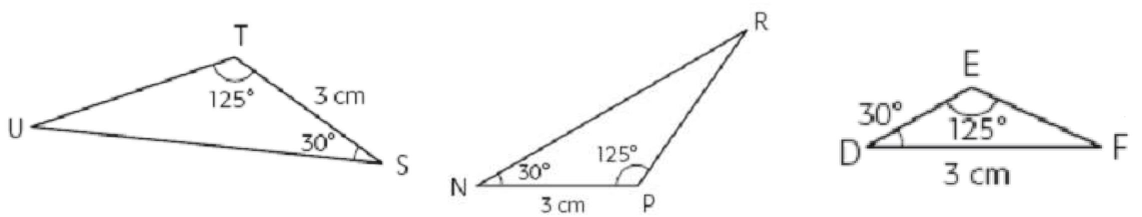
1.		
2.		
3.		
4.		

ATTENTION! Le triangle ABC n'est pas isométrique au triangle GHJ, car ________________

____.

3) <u>La condition minimale d'isométrie A-C-A</u>

> Deux triangles ayant un côté isométrique compris entre des angles homologues isométriques sont isométriques.



1.		
2.		
3.		
4.		

ATTENTION! Le triangle DEF n'est pas isométrique au triangle NPR, car_________________

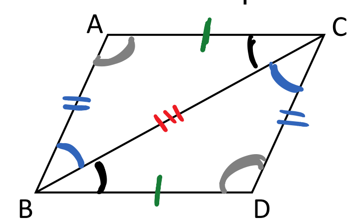
____.

B) Le raisonnement déductif

On utilise le raisonnement déductif pour démontrer que deux triangles sont isométriques.

Exemples :   CCC   CAC   ACA

1) Les triangles ABC et BCD sont créés par la diagonale BC du parallélogramme ABCD. Justifie les étapes qui démontrent que les triangles ABC et BCD sont isométriques.



Hypothèses: ABCD est un parallélogramme
BC est une diagonale

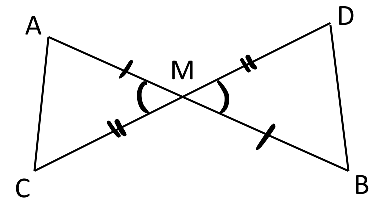
Conclusion: $\triangle ABC \cong \triangle BCD$

Affirmations	Justifications
1. $\overline{AC} \cong \overline{BD}$	Les côtés opposés d'un parallélogramme sont $\cong$.
2. $\overline{AB} \cong \overline{CD}$	Les côtés opposés d'un //logramme sont $\cong$.
3. $\overline{BC} \cong \overline{BC}$	côté appartenant aux 2 $\triangle$.
4. $\triangle ABC \cong \triangle BCD$	par le cas d'isométrie CCC.

2) Deux segments AB et CD se coupent en leur milieu M. Justifie les étapes qui démontrent que les triangles AMC et BMD sont isométriques.

Hypothèses : M est le milieu de AB
M est le milieu de CD

Conclusion : $\triangle AMC \cong \triangle BMD$



	Affirmations	point Justifications
1.	$\overline{AM} \cong \overline{MB}$	Le pt milieu divise un segment en 2 parties $\cong$.
2.	$\overline{CM} \cong \overline{MD}$	Le pt milieu divise un segment en 2 parties $\cong$.
3.	$\angle AMC \cong \angle DMB$	Les $\angle$ opposés par le sommet sont $\cong$.
4.	$\triangle AMC \cong \triangle BMD$	par le cas d'$\cong$ CAC

C) La recherche de mesures manquantes

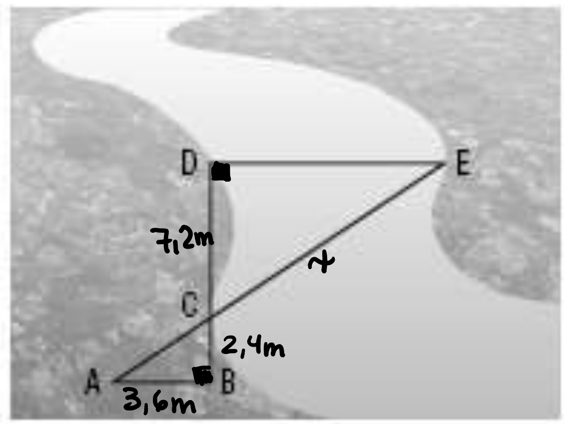
Jusqu'à présent, nous nous sommes contentés d'être capables de démontrer si deux triangles étaient semblables ou non. Maintenant, nous ajouterons une étape supplémentaire. Nous trouverons certaines mesures manquantes après avoir démontré que deux triangles sont semblables. Regardons les exemples qui suivent.

Exemples :

1) Un arpenteur doit déterminer la largeur de la rivière illustrée ci-contre, car un pont y sera bientôt construit (entre les points C et E). Il plante des piquets aux points A, B, C, D et E de sorte que m ∠ B = m ∠ D = 90°. Sachant que les segments AB, BC et CD mesurent respectivement 3,6 m, 2,4 m et 7,2 m, calculez la largeur de la rivière à cet endroit.

Hypothèses : $m\angle B = m\angle D = 90°$
$m\overline{AB} = 3,6\,m$
$m\overline{BC} = 2,4\,m$
$m\overline{CD} = 7,2\,m$

Conclusion : $\triangle ABC \sim \triangle CDE$



Affirmations	Justifications
1. $m\angle B = m\angle D = 90°$	par hypothèse
2. $m\angle ACB = m\angle DCE$	les ∠ opposés par le sommet sont ≅.
3. $\triangle ABC \sim \triangle CDE$	par le cas de ∼ AA.

4- $m\overline{AC}$

$a^2+b^2=c^2$

$3,6^2+2,4^2=c^2$

$c \approx 4,33\,m$

5- $m\overline{CE}$

$\frac{m\overline{BC}}{m\overline{CD}} = \frac{m\overline{AC}}{m\overline{CE}}$

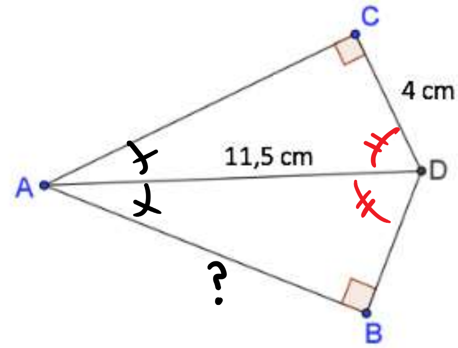
$\frac{2,4}{7,2} = \frac{4,33}{x}$

$x = \frac{4,33 \cdot 7,2}{2,4} \approx 12,99\,m.$

2) Dans la figure ci-dessous, $\overline{AD}$ est la bissectrice de l'angle BAC. Détermine la mesure de $\overline{AB}$.

Hypothèses: $\overline{AD}$ est la bissectrice de $\angle BAC$

Conclusion: $\triangle ADB \cong \triangle ACD$

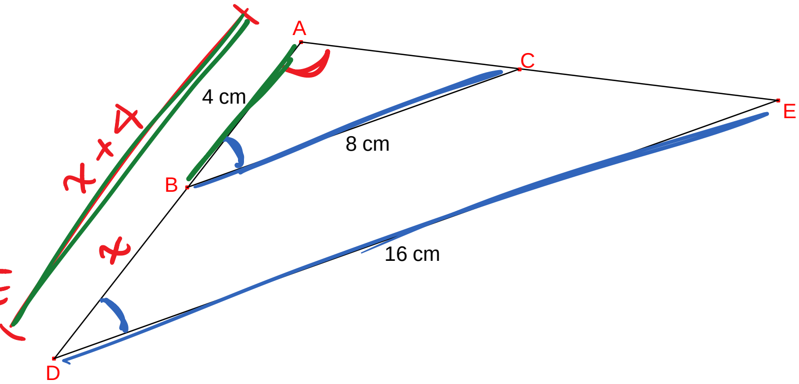


AFFIRMATIONS	JUSTIFICATIONS
1. $\angle CAD \cong \angle DAB$	Une bissectrice coupe un angle en 2 parties $\cong$.
A 2. $\angle B \cong \angle C$	par hypothèse
A 3. $\angle CDA \cong \angle ADB$	La somme des mesures des $\angle$ intérieurs d'un $\triangle$ est 180°. Comme les 2 autres paires d'$\angle$ sont $\cong$, la 3e paire l'est nécessairement.
C 4. $\overline{AD} \cong \overline{AD}$	Côté commun aux 2 $\triangle$.
5. $\triangle ACD \cong \triangle ADB$	par le cas d'$\cong$ A-C-A.
6. $m\overline{AC}$: $a^2+b^2=c^2$ $4^2+b^2=11{,}5^2$ $b \approx 10{,}78$ cm	par le théorème de Pythagore
7. $m\overline{AB} = m\overline{AC} = 10{,}78$ cm	les côtés homologues de $\triangle$ $\cong$ sont $\cong$.

p.23

3) Sur la figure suivante, le segment BC est parallèle au segment DE. Détermine la mesure de $\overline{BD}$.

hypothèses : $\overline{BC} // \overline{DE}$



Conclusion : $\triangle ABC \sim \triangle ADE$

Affirmations	Justification
1. $\angle BAC \cong \angle DAE$	angle appartenant aux 2 $\triangle$
2. $\angle ABC \cong \angle ADE$	les $\angle$ correspondants formés par 2 // sont $\cong$.
3. $\triangle ABC \sim \triangle ADE$	par le cas de similitude AA.
4. $\dfrac{m\overline{AB}}{m\overline{AD}} = \dfrac{m\overline{BC}}{m\overline{DE}}$	rapport des côtés homologues proportionnel dans les $\triangle \sim$.

$$\frac{4}{x+4} = \frac{8}{16}$$

$$8(x+4) = 4 \cdot 16$$

$$8x + 32 = 64$$
$$-32 \quad -32$$

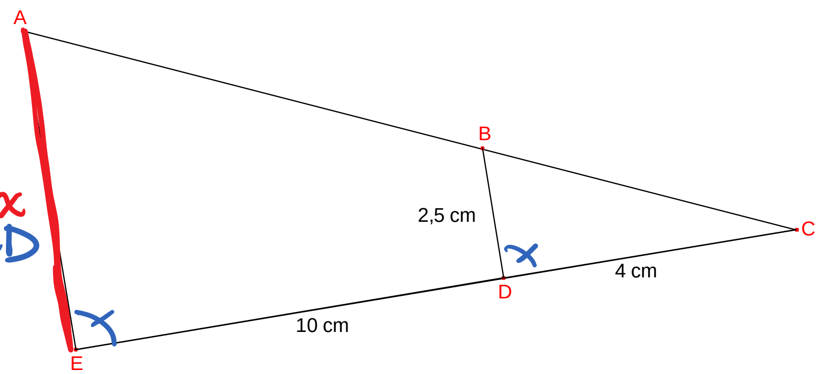
$$8x = 32$$

$$x = 4\text{ cm}$$

4) Sur la figure ci-contre, les segments BD et AE sont parallèles. Quelle est la mesure de $\overline{AE}$?

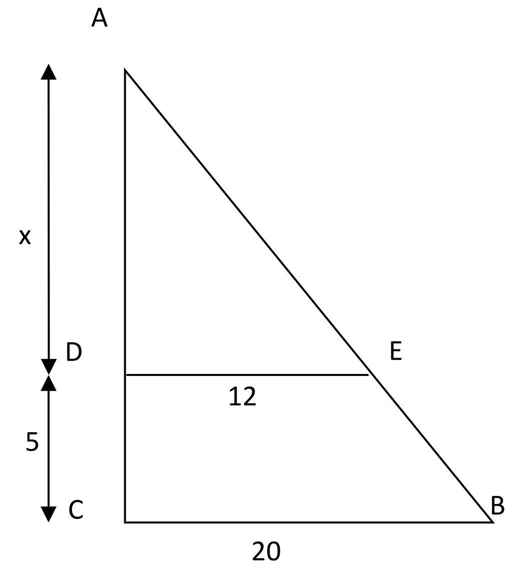
hypothèses : $\overline{BD} \parallel \overline{AE}$

Conclusion : $\triangle ACE \sim \triangle BCD$



Affirmations	justifications
1- $\angle ACE \cong \angle BCD$	angle appartenant aux 2 $\triangle$.
2- $\angle AEC \cong \angle BDC$	$\angle$ correspondants formés par 2 // $\cong$.
3- $\triangle ACE \sim \triangle BCD$	par le cas de $\sim$ AA
4- $\frac{m\overline{AE}}{m\overline{BD}} = \frac{m\overline{EC}}{m\overline{DC}}$ $\frac{x}{2{,}5} = \frac{10+4}{4}$ $4x = 2{,}5 \cdot 14$ $4x = 35$ $x = 8{,}75\text{ cm}$	rapport des côtés homologues proportionnels dans les $\triangle \sim$.

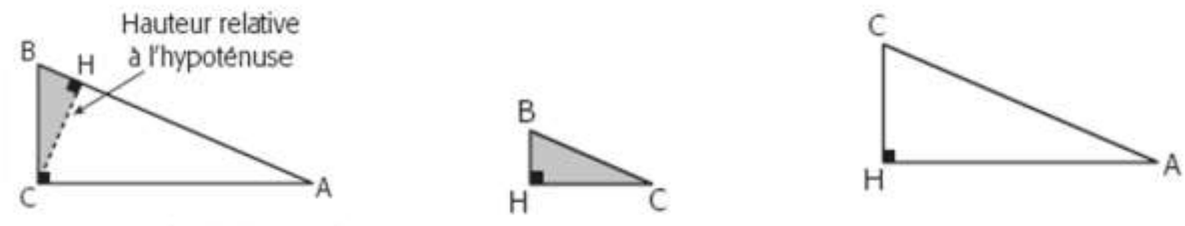
5) Sur la figure ci-dessous, les segments DE et CB sont parallèles. Détermine la longueur du segment AD.



5. Les triangles rectangles semblables déterminés par la hauteur relative à l'hypoténuse

Dans un triangle rectangle, la hauteur relative à l'hypoténuse détermine deux autres triangles rectangles, semblables au premier.

Soit le triangle rectangle ABC et les deux triangles rectangles BCH et CHA suivants :



Par la condition minimale de similitude A-A :

$\Delta ABC \sim \Delta CBH$ puisque ces deux triangles ont un angle droit et qu'ils ont l'angle B en commun;
$\Delta ABC \sim \Delta ACH$ puisque ces deux triangles ont un angle droit et qu'ils ont l'angle A en commun.

Par la transitivité de la relation de similitude, $\Delta CBH \sim \Delta ACH$.

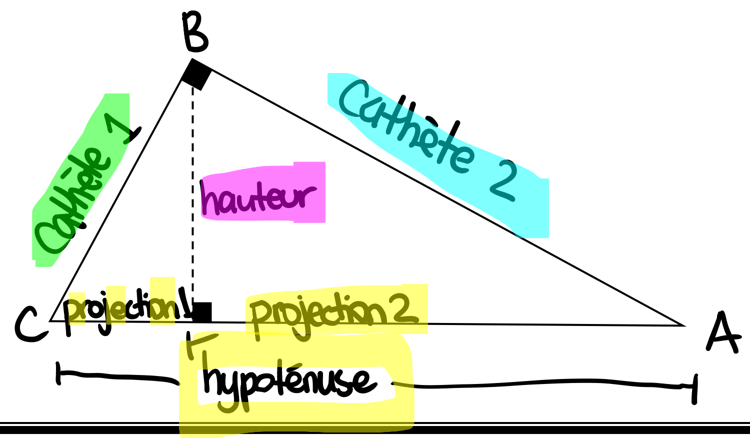
La relation de similitude est transitive, c'est-à-dire que si $\mathbf{\Delta ABC \sim \Delta DEF}$ et $\mathbf{\Delta DEF \sim \Delta GHJ}$, alors $\mathbf{\Delta ABC \sim \Delta GHJ}$.

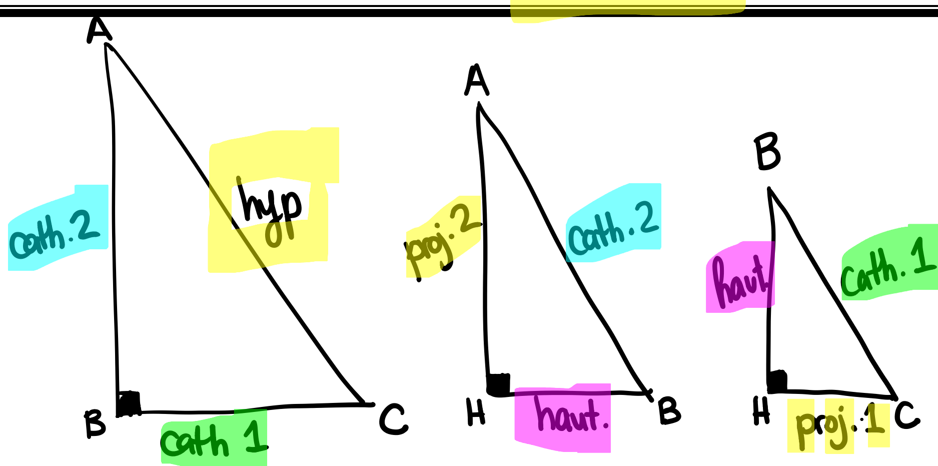
Les trois triangles sont donc semblables.

6. Les relations métriques dans le triangle rectangle

Établir des proportions à partir des côtés homologues des triangles rectangles semblables permet de trouver plusieurs relations métriques qui facilitent la recherche de mesures manquantes dans un triangle rectangle.

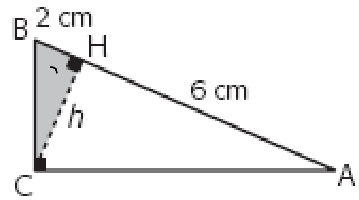
Pour faciliter la recherche de ces mesures manquantes, nous devons identifier les côtés du triangle de cette façon :

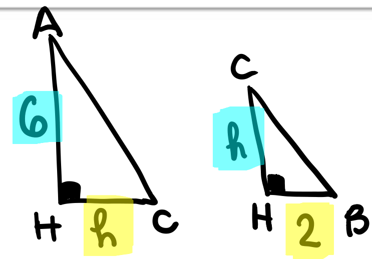




A) Première relation : Le théorème de la hauteur relative à l’hypoténuse

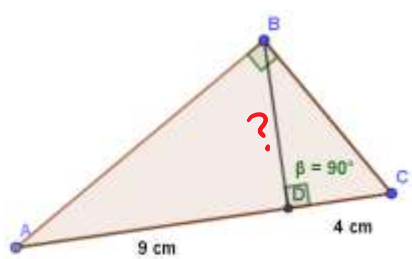
Déterminons la hauteur relative à l’hypoténuse du triangle rectangle ABC ci-contre:



1. Dessiner les deux triangles rectangles semblables dans lesquels se trouve la mesure manquante en les orientant de la même façon et en reportant les mesures connues et la mesure manquante.	
2. Établir une proportion à partir des mesures des côtés homologues.	$\frac{6}{h} \times \frac{h}{2}$
3. Résoudre la proportion pour trouver la mesure manquante.	$\boxed{h^2 = 6 \cdot 2}$ $h^2 = 12$ $h \approx 3{,}46\text{cm}$

La relation est : $\boxed{\text{hauteur}^2 = \text{proj}_1 \times \text{proj}_2}$

Exemple:



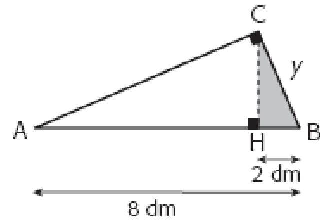
$(m\overline{BD})^2 = 9 \cdot 4$

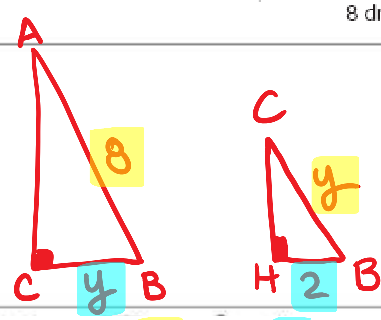
$(m\overline{BD})^2 = 36$

$m\overline{BD} = 6 \text{ cm}$

B) Deuxième relation : Le théorème de la cathète

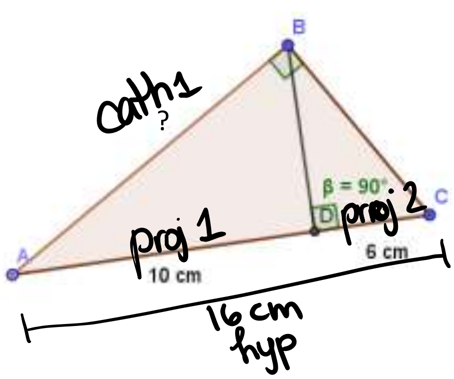
Pour déterminer la mesure de la cathète BC dans le triangle rectangle ABC ci-contre, on procède de la façon suivante.



1. Dessiner les deux triangles rectangles semblables dans lesquels se trouve la mesure manquante en les orientant de la même façon et en reportant les mesures connues et la mesure manquante.	
2. Établir une proportion à partir des mesures des côtés homologues.	$\frac{8}{y} = \frac{y}{2}$
3. Résoudre la proportion pour trouver la mesure manquante.	$\boxed{y^2 = 2 \cdot 8}$ $y^2 = 16$ $y = 4\text{ cm}$

La relation est : $cath_1^2 = hyp \times proj_1$ OU $cath_2^2 = hyp \times proj_2$

Exemples :

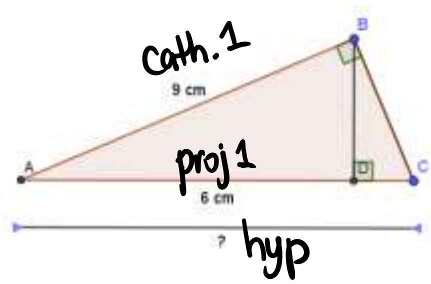


$cath_1^2 = hyp \cdot proj_1$

$(m\overline{AB})^2 = 16 \cdot 10$

$(m\overline{AB})^2 = 160$

$m\overline{AB} \approx 12,65$



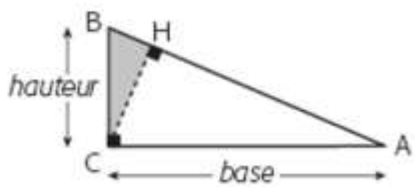
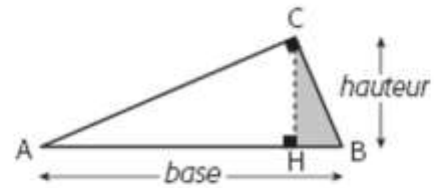
$cath_1^2 = hyp \cdot proj_1$

$9^2 = m\overline{AC} \cdot 6$

$13,5\text{ cm} = m\overline{AC}$

C) Troisième relation : Le théorème du produit des cathètes

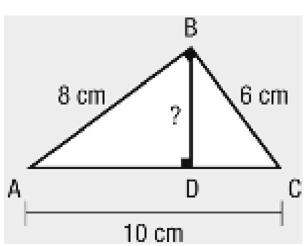
En calculant l'aire d'un triangle rectangle de deux façons différentes, on peut déduire une autre relation métrique dans le triangle rectangle.

Calcul de l'aire d'un triangle rectangle	
Première façon	**Deuxième façon**
	
$\frac{m\overline{AC} \cdot m\overline{BC}}{2}$	$\frac{m\overline{AB} \cdot m\overline{CH}}{2}$
$\frac{m\overline{AC} \cdot m\overline{BC}}{\cancel{2}} = \frac{m\overline{AB} \cdot m\overline{CH}}{\cancel{2}}$	

La relation est : cath1 × cath2 = hyp × hauteur

Remarque:
Il existe plusieurs démarches permettant de déterminer une mesure manquante dans un triangle. Dans tous les cas, on peut avoir recours aux relations métriques incluant la relation de Pythagore.

Exemple:



$cath_1 \times cath_2 = hyp \cdot haut$

$8 \times 6 = 10 \cdot m\overline{BD}$

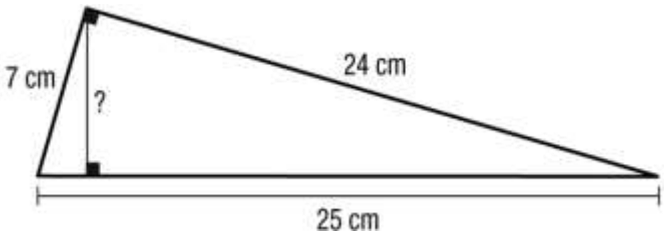
$4{,}8\text{ cm} = m\overline{BD}$

Exercices

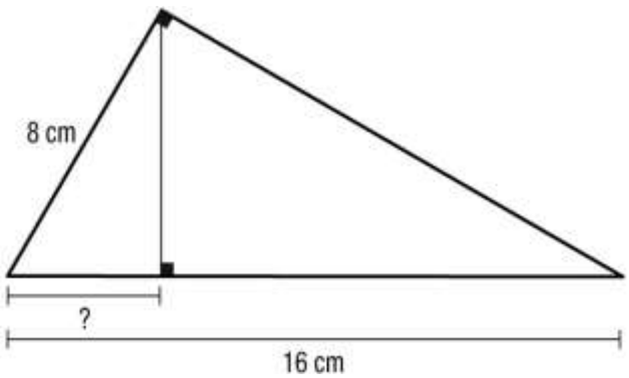
Relations métriques

1. Observez les triangles rectangles ci-dessous. Dans chaque cas cherchez la mesure manquante.

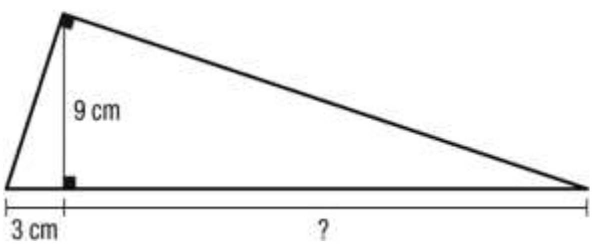
a)



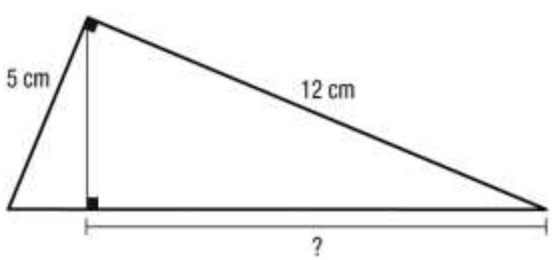
b)



c)

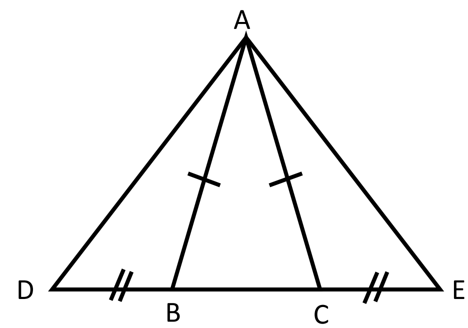


d)

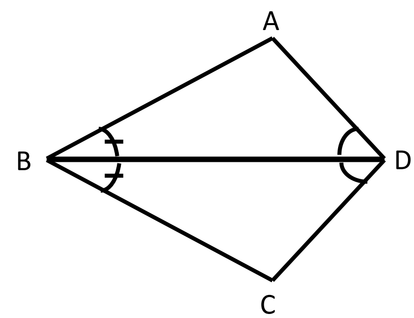


Exercices supplémentaires : À réaliser sur des feuilles lignées

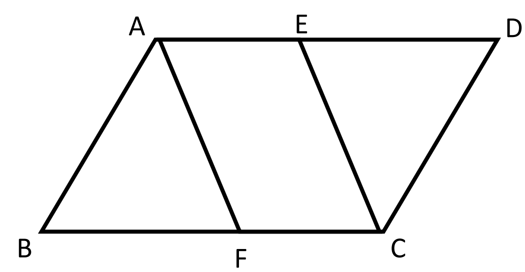
1. Le triangle ABC est isocèle de sommet principal A. Si les segments BD et CE sont isométriques, justifie les étapes qui démontrent que les triangles ABD et ACE sont isométriques.



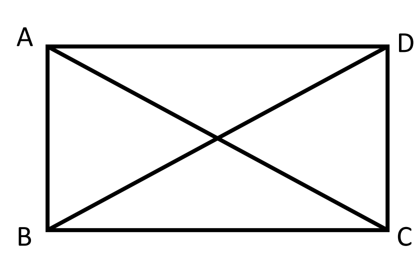
2. Justifie les étapes qui démontrent le théorème suivant : « Si dans un quadrilatère, une diagonale est bissectrice de deux angles opposés, alors elle détermine deux triangles isométriques. »



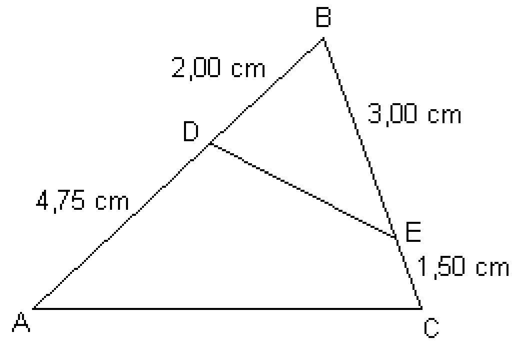
3. Dans le parallélogramme ci-contre, E et F désignent les milieux respectifs des côtés AD et BC. Justifie les étapes montrant que les triangles ABF et CDE sont isométriques.



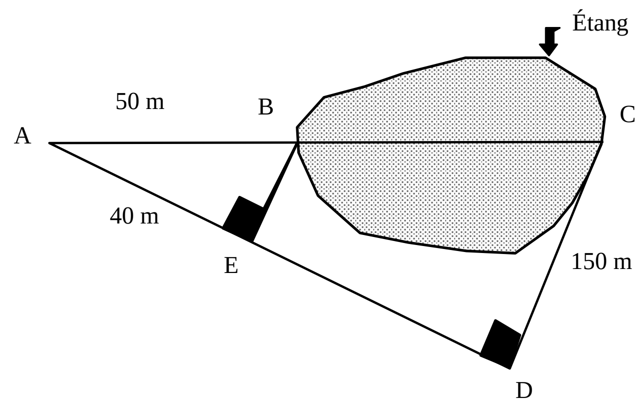
4. Justifie les étapes qui démontrent la propriété suivante : « Les diagonales d'un rectangle sont isométriques. »



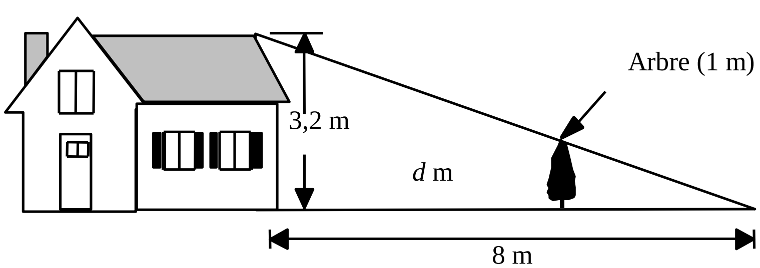
5. Démontre que le triangle ABC est semblable au triangle EBD.



6. Trouvez la longueur BC de l'étang illustrée par le schéma suivant.

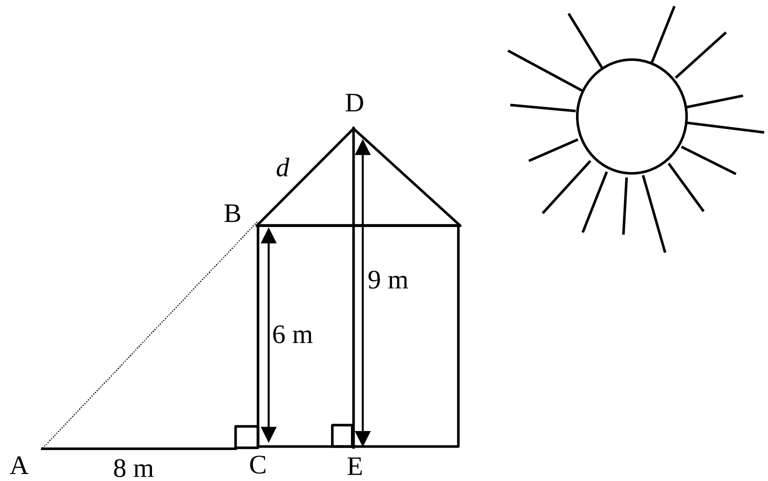


7. Monsieur Boisvert désire planter un arbre exotique d'environ 1 mètre de hauteur du côté nord de sa maison. Sachant que cet arbre doit bénéficier d'un maximum d'ombre, il a fait le schéma suivant :

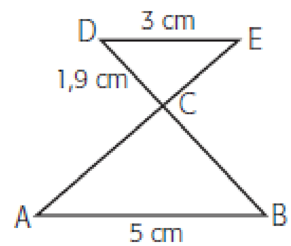


Quelle est, arrondie au dixième de mètre, la distance *d* maximale entre l'arbre et la maison?

8. Pour trouver la longueur *d* de la toiture de l'entrepôt qu'il veut réparer, Jean utilise les données illustrées sur le schéma suivant. Trouvez cette longueur *d*.



9. Complète le raisonnement déductif ci-dessous permettant de trouver la mesure de $\overline{BC}$ dans la figure ci-contre, sachant que $\overline{DE}$ // $\overline{AB}$.



Affirmation	Justification
1. $\angle CDE \cong \angle CBA$	
2.	Ce sont des angles opposés par le sommet.
3. $\Delta CDE \sim \Delta ABC$	La condition minimale de similitude __ ___ est respectée.
4. $m\overline{BC} \approx 3{,}17 cm$	Dans les triangles semblables, les rapports des mesures des sont . Par calcul :