Programme local
Analyse combinatoire

NOTES DE COURS ET EXERCICES

Mathématique 5e secondaire – CST
Collège Regina Assumpta
2016 – 2017

Nom : ______________________________

Groupe : _____

NOTES DE COURS

1. <u>Introduction à l'analyse combinatoire</u>

UN VOYAGE EN EUROPE

Françoise et George veulent visiter l'Europe cet été. Ils considèrent cinq pays :

- l'Allemagne,
- la Belgique,
- la Croatie,
- le Danemark et
- l'Espagne.

a) George se demande de combien de façons différentes il est possible d'ordonner la séquence des cinq pays à visiter.

Quelques possibilités :

Calcul du nombre de possibilités :

1er pays 2^{e} pays 3^{e} pays 4^{e} pays 5^{e} pays

Concept mathématique :	**Est-ce qu'on tient compte de l'ordre?**
Formule (pour un ensemble de *n* éléments) **:**	

►La ________________________ d'un nombre naturel *n* se note ____ et se calcule :

b) Françoise préfère réduire le nombre de pays à visiter afin de mieux profiter des attraits de chacun. Elle aimerait dresser la liste des sous-ensembles de 3 pays qu'on peut former à partir de la liste des 5 pays. Cependant, elle veut déjà connaître l'ordre de leurs visites afin de faire diverses réservations.

Quelques possibilités :

Calcul du nombre de possibilités :

1er pays 2^{e} pays 3^{e} pays

Concept mathématique :	**Est-ce qu'on tient compte de l'ordre?**
Formule (pour un ensemble de *k* éléments choisis dans un ensemble de *n* éléments) **:**	

c) Françoise et George n'arrivent pas à s'entendre sur le choix des trois pays. Ils procéderont donc par tirage au sort. De combien de billets de tirage auront-ils besoin pour que chaque « trio » de pays soit représenté?

Liste complète des possibilités :

Calcul du nombre de possibilités :

Concept mathématique :	**Est-ce qu'on tient compte de l'ordre?**
Formule :	

►Lorsqu'on ne tient pas compte de l'ordre, il y a généralement __________ de résultats dans l'univers des possibles.

2. Permutation

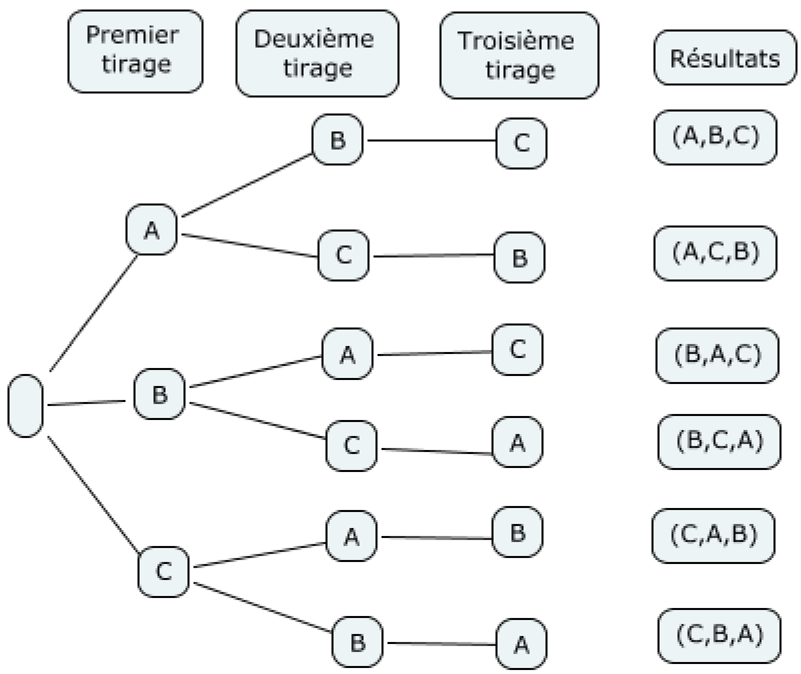
Une permutation est une disposition ordonnée de tous les éléments d'un ensemble.

Deux permutations d'un ensemble se distinguent par l'ordre de la disposition des éléments qui le composent.

Exemples :

1) On tire successivement 3 billes d'un sac en contenant 3 identifiées par A, B et C.

Les résultats possibles sont représentés dans le diagramme en arbre ci-dessous.



Sans faire l'arbre des résultats, sans écrire toutes les possibilités, on aurait pu trouver la réponse avec le calcul suivant :

Il y a : - _____ façons de choisir la première boule;

- _____ façons de choisir la deuxième boule;
- _____ façons de choisir la troisième boule.

d'où le calcul : ___________________________

2) Un tirage est organisé pour déterminer l'ordre dans lequel les élèves passeront leur oral. Puisque c'est le dernier cours, 8 élèves doivent faire leur présentation. Combien y a-t-il de possibilités pour l'ordre de passage?

Bref, lorsque nous sommes en présence d'une **PERMUTATION**, nous voulons connaître le nombre de possibilités de placer **TOUS les éléments** en tenant compte de l'ordre. Pour ce faire, nous devons connaître le nombre d'options possible pour chaque étape de l'expérience aléatoire, puis effectuer une multiplication.

$$nombre\ de\ permutations = \frac{nb\ options}{1\text{ère}\ \acute{e}tape} \times \frac{nb\ options}{2e\ \acute{e}tape} \times \frac{nb\ options}{3e\ \acute{e}tape} \times \ldots \times 2 \times 1$$

$$\boldsymbol{nombre\ de\ permutations = n!}$$

3. Arrangement

Un arrangement est une disposition ordonnée d'un certain nombre d'éléments d'un ensemble donné.

Deux arrangements se distinguent par l'ordre de disposition de leurs éléments et le nombre d'éléments qu'ils contiennent.

Exemple :

1) On choisit au hasard deux nombres dans l'ensemble $\mathrm{A} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.
(2,6), (4,8) et (8,4) sont trois arrangements possibles de l'ensemble A.

a) Combien d'arrangements de deux nombres sont possibles à partir de l'ensemble A?

1er nombre	**2^{e} nombre**	**Résultats**
2	4	(2, 4)
	6	(2, 6)
	8	(2, 8)
	10	(2, 10)
4	2	(4, 2)
	6	(4, 6)
	8	(4, 8)
	10	(4, 10)
6	2	(6, 2)
	4	(6, 4)
	8	(6, 8)
	10	(6, 10)
8	2	(8, 2)
	4	(8, 4)
	6	(8, 6)
	10	(8, 10)
10	2	(10, 2)
	4	(10, 4)
	6	(10, 6)
	8	(10, 8)

b) Combien d'arrangements de trois nombres sont possibles à partir de l'ensemble A?

c) Combien d'arrangements de quatre nombres sont possibles à partir de l'ensemble A?

d) Combien d'arrangements de cinq nombres sont possibles à partir de l'ensemble A?

*** Pour cette question, nous calculons plutôt le nombre de ________________.

2) Pour la prochaine année scolaire, tu dois choisir une activité parascolaire parmi les 4 activités qui te sont proposées :

A) Aquaforme
B) Badminton
C) Curling
D) Décathlon (initiation)

Tu dois inscrire 3 choix dans l'ordre de préférence. Si tu inscris B, C et D, c'est que tu préfères Badminton à Curling, et Curling à Décathlon. Par contre, si tu inscris C, B et D, c'est que tu préfères Curling à Badminton, et Badminton à Décathlon.

Donc, l'ordre dans lequel tu inscris tes choix est très important.

a) Combien as-tu d'options pour ton premier choix? ____________________

b) Combien as-tu d'options pour ton deuxième choix, une fois que tu as fait ton premier choix? ____

c) Combien as-tu d'options pour ton troisième choix, une fois que tu as fait ton premier et ton deuxième choix? ____

d) Combien de choix différents de trois activités s'offrent à toi?

__________ __________ __________
1er choix 2^{e} choix 3^{e} choix

3) Dans un groupe de 5^e secondaire, on décide de former un petit comité de **deux** élèves pour représenter ces derniers auprès de la direction. Les six candidats retenus sont **A**mine, **B**randon, **C**aroll, **D**elia, **É**rika et **F**abrice.

Parmi les deux candidats choisis, un seul peut rencontrer la direction. Il faut donc nommer un président et un vice-président. Combien de paires d'élèves peut-on former parmi ces 6 élèves?

Voyons toutes les possibilités :

(A, B), (A, C), (A, D), (A, E), (A, F)	et	(B, A), (C, A), (D, A), (E, A), (F, A)
(B, C), (B, D), (B, E), (B, F)	et	(C, B), (D, B), (E, B), (F, B)
(C, D), (C, E), (C, F)	et	(D, C), (E, C), (F, C)
(D, E), (D, F)	et	(E, D), (F, D)
(E, F)	et	(F, E)

Il y aurait donc en tout _____ possibilités différentes de paires d'élèves.

Ces possibilités représentent les ____________________ possibles dans cette situation.

De quelle façon pourrait-on calculer le nombre total de possibilités sans les énumérer?

Bref, lorsque nous sommes en présence d'un **ARRANGEMENT**, nous voulons connaître le nombre de possibilités de placer **un certain nombre d'éléments d'un ensemble** en tenant compte de l'ordre. Pour ce faire, nous devons connaître le nombre d'options possible pour chaque étape de l'expérience aléatoire, puis effectuer une multiplication.

Formule si l'expérience aléatoire est réalisée **sans remise** :

$$\frac{nb\ options}{1^{ère}\ étape} \times \frac{nb\ options}{2^{e}\ étape} \times \ldots \times \frac{nb\ options}{n^{e}\ étape} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Formule si l'expérience aléatoire est réalisée **avec remise** :

$$n^k$$

** Remarque : Le calcul du nombre d'arrangements ne se termine pas par 1 comme c'était le cas dans le calcul de permutations!*

4. Combinaison

Une combinaison est un choix d'un certain nombre d'éléments d'un ensemble donné.

Une **COMBINAISON** correspond à un sous-ensemble d'éléments non ordonnés dans un ensemble, en d'autres mots, on ne tient pas compte de l'ordre des éléments choisis.

On calcule une combinaison à l'aide de la formule suivante :

$$nombre\ de\ combinaisons = \frac{nombre\ d'arrangements}{nombre\ de\ permutations\ d'un\ résultat}$$

Exemples :

1) Dans un groupe de 5^e secondaire, on décide de former un petit comité de **deux** élèves pour représenter ces derniers auprès de la direction. Les six candidats retenus sont **A**mine, **B**randon, **C**aroll, **D**elia, **É**rika et **F**abrice.

La direction a cette fois-ci décidé de rencontrer les deux élèves. Il n'y aura donc pas de président et de vice-président, mais bien deux représentants d'élèves.

Voici toutes les possibilités trouvées précédement :

(A, B), (A, C), (A, D), (A, E), (A, F)	et	(B, A), (C, A), (D, A), (E, A), (F, A)
(B, C), (B, D), (B, E), (B, F)	et	(C, B), (D, B), (E, B), (F, B)
(C, D), (C, E), (C, F)	et	(D, C), (E, C), (F, C)
(D, E), (D, F)	et	(E, D), (F, D)
(E, F)	et	(F, E)

a) Considérant la nouvelle consigne, est-ce que toutes les possibilités sont différentes? ____

b) Explique ta réponse en a).

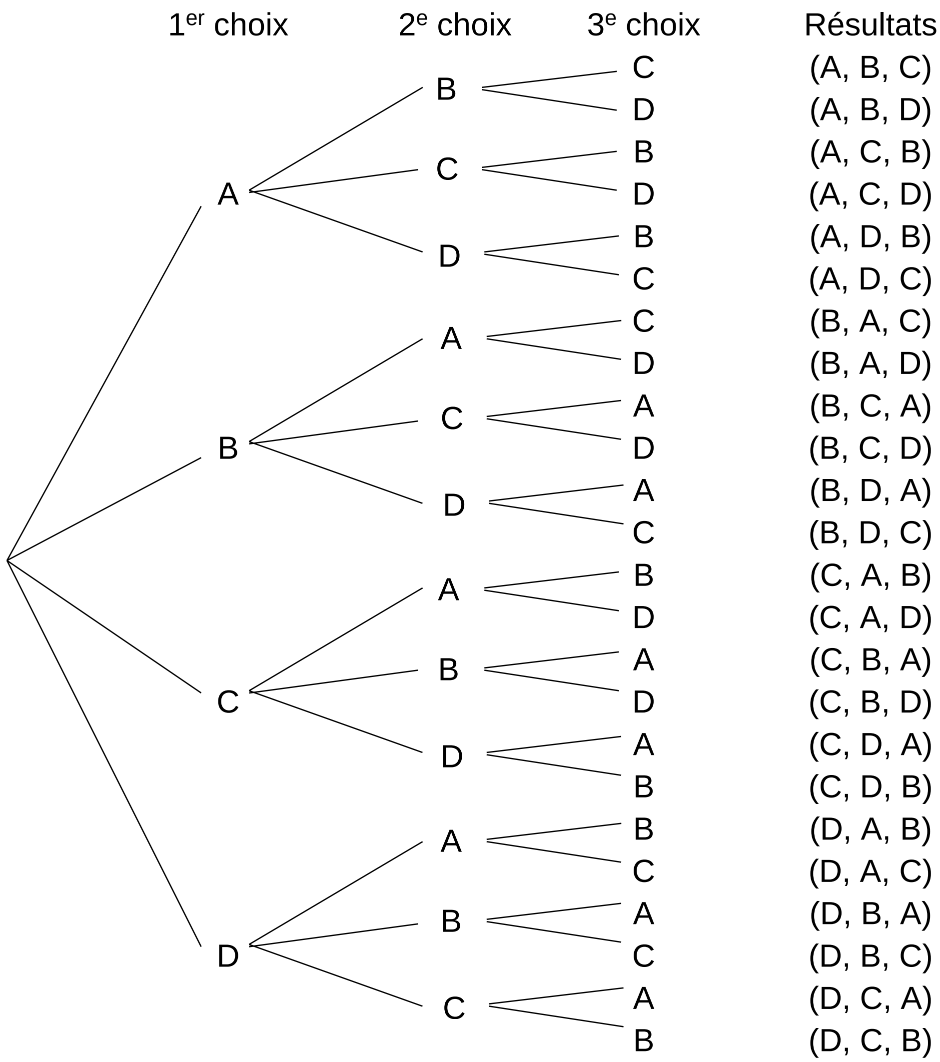
c) Combien y a-t-il de possibilités différentes de paires d'élèves?

d) De quelle façon pourrait-on calculer le nombre de possibilité sans les énumérer?

2) Le président de ton groupe organise un dîner pizza et il a besoin de 3 personnes pour aller chercher les pizzas lorsqu'elles arriveront. Il y a 4 volontaires : Antoine (A), Brigitte (B), Christian (C) et Diane (D).

a) Est-ce que choisir (B, C, D) est le même résultat que de choisir (C, B, D)?

b) Voici l'arbre des résultats si on tenait compte de l'ordre :



Surligne de la même couleur les trios formés des mêmes lettres.

c) Combien de couleurs différentes as-tu utilisées?

d) Prenons le trio de lettre (A, B, C). Voici les différents résultats obtenus à l'aide de ces trois lettres :

(A, B, C), (A, C, B), (B, A, C), (B, C, A), (C, A, B) et (C, B, A).

Ces six différents résultats sont les ___________________ possibles avec ces trois mêmes lettres.

e) Combien y a-t-il de façons différentes de choisir 3 élèves parmi les 4 volontaires?

3) Un tirage sera effectué la semaine prochaine pour une remise de prix. Chaque personne doit choisir 6 numéros différents entre 1 et 20. Les numéros tirés seront mis en ordre croissant avant d'être annoncés.

a) Combien y a-t-il de résultats différents?

b) Quelle est la probabilité de gagner?

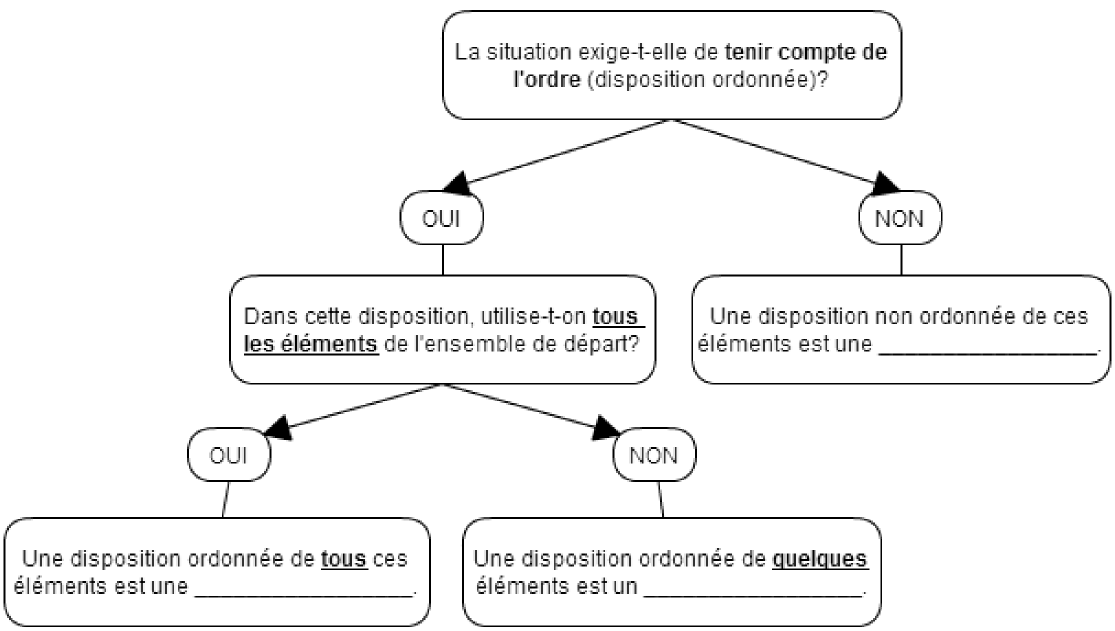
Bref, lorsque nous sommes en présence d'une combinaison, nous voulons connaître <u>le nombre de possibilités</u> de placer **un certain nombre d'éléments d'un ensemble** sans tenir compte de l'ordre.

Pour ce faire, nous devons connaître le nombre d'arrangements ainsi que le nombre de permutations possibles avec un arrangement.

Formule si l'expérience aléatoire est réalisée **sans remise** :

$$nombre\ de\ combinaisons = \frac{nombre\ d'arrangements}{nombre\ de\ permutations\ d'un\ résultat}$$

5. Choisir entre permutation, arrangement et combinaison



<u>Exemples</u> : Pour les exemples suivants, mentionne le type de situation (permutation, arrangement ou combinaison) et justifie ta réponse <u>avant d'effectuer le calcul</u>.

1) Dans un groupe d'élèves de 5^e secondaire, on décide de former un petit comité de **<u>six</u>** élèves pour représenter les élèves auprès de la direction. Les six candidats sont les suivants : **<u>A</u>**mine, **<u>B</u>**randon, **<u>C</u>**aroll, **<u>D</u>**elia, **<u>É</u>**rika et **<u>F</u>**abrice.

a) S'il est décidé que dans les 6 élèves choisis, chacun aura un rôle déterminé : président, vice-président, trésorier, vérificateur du trésorier, secrétaire et adjoint au secrétaire. Combien de comités d'élèves peut-on former avec ces 6 élèves?

b) S'il est décidé que dans les 6 élèves choisis, aucun rôle ne sera déterminé, c'est-à-dire que tous les élèves auront le même droit de parole sur tous les sujets. Combien de comités d'élèves peut-on former avec ces 6 élèves?

2) Supposons que dans ce même groupe de 5^e secondaire, on décide plutôt de former un petit comité de **<u>trois</u>** élèves pour représenter ces derniers auprès de la direction. Les six candidats retenus sont les mêmes : **<u>A</u>**mine, **<u>B</u>**randon, **<u>C</u>**aroll, **<u>D</u>**elia, **<u>É</u>**rika et **<u>F</u>**abrice.

a) S'il est décidé que dans les 3 élèves choisis, un seul peut rencontrer la direction et qu'il faut donc nommer un président, un vice-président (en cas d'absence du président) et un assistant au vice-président (en cas d'absence du vice-président), combien de trios d'élèves peut-on former parmi ces 6 élèves?

b) S'il est décidé que dans les 3 élèves choisis, ces trois derniers seront présents pour rencontrer la direction (sans poste de président, vice-président et assistant au vice-président), combien de trios d'élèves peut-on former parmi ces 6 élèves?

c) Combien y aurait-il d'arrangements et de combinaisons possibles si on devait choisir 4 élèves parmi 6 candidats?

Nombre d'arrangements :

Nombre de combinaisons :

d) Combien y aurait-il d'arrangements et de combinaisons possibles si on devait choisir 5 élèves parmi 13 candidats?

Nombre d'arrangements :

Nombre de combinaisons :

6. <u>Factorielle</u>

Exemples :

1. Calculez le résultat des opérations suivantes.
   a. $4! =$
   b. $8! =$
   c. $10! \ =$
   d. $1! + 10! =$
   e. $0! =$
   f. $\frac{15!}{14!} =$
   g. $5! \times 7! =$
   h. $\frac{6!-4!}{(6-4)!} =$

2. La fonction factorielle produit rapidement des nombres très grands, pouvant même excéder la capacité de certaines calculatrices. Calculez le résultat des opérations suivantes.
   a. $\frac{105!}{100!} =$

   b. $\frac{98!}{(98-5)! \times 5!} =$

7. Exemples supplémentaires

P

A

C

1. Déterminez de combien de façons différentes il est possible d'écrire ces ensembles.

   a. $\{A, B, C, D, E\}$

   b. $\{2, 4, 6\}$

   c. $\{pile,\ face\}$

   d. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

   e. $\{coeur, pique, trèfle, carreau\}$

   f. $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10, valet, dame, roi\}$

P

A

C

2. Si l'on choisit aléatoirement 6 lettres parmi les 26 lettres de l'alphabet, combien de mots différents peut-on écrire, même si ces mots n'ont pas de sens :

   a. Si une lettre ne peut pas être choisie plus d'une fois?

   b. Si une lettre peut-être choisie plus d'une fois?

P

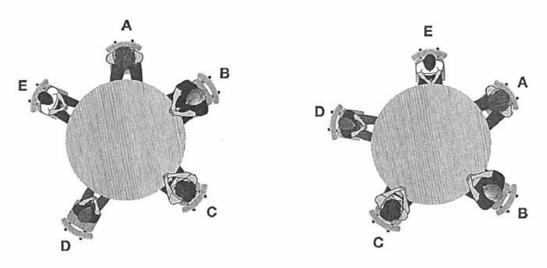
A

C

3. De combien de façons différentes un groupe de 12 personnes peut-il se ranger en file indienne?

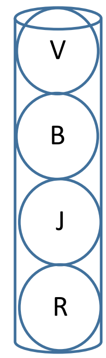
P
A
C

4. Si l'on considère les deux situations suivantes comme identiques, de combien de façons différentes un groupe de 5 personnes peut-il s'asseoir autour d'une table ronde?



P
A
C

5. Une confiserie fabrique des bonbons violets, bleus, jaunes et rouges. Pour former un assortiment, on place quatre bonbons dans un tube tel qu'il est illustré ci-contre.



   a. Combien d'assortiments différents est-il possible de former :
      i. Si l'on n'y met qu'un seul bonbon de chaque couleur?

      ii. Si l'on peut y mettre plus d'un bonbon de chaque couleur?

P
A
C

   b. Si l'on peut mettre plus d'un bonbon de chaque couleur dans le tube, en choisissant un assortiment au hasard parmi tous les assortiments possibles, qu'elle est la probabilité d'en obtenir un dans lequel :
      i. Un bonbon rouge et un bonbon violet se trouvent à chacune des extrémités?

      ii. Deux bonbons de la même couleur se trouvent à chacune des extrémités?

P
A
C

6. On sépare un groupe de 16 enfants en deux équipes de soccer comportant le même nombre de joueurs.
   a. Combien d'équipes différentes peut-on former?

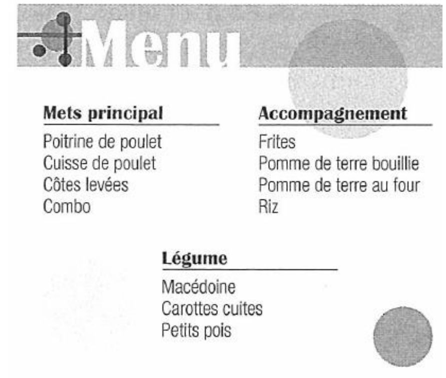
   b. De combien de façons différentes peut-on attribuer les chandails numérotés de 1 à 8 à l'intérieur d'une même équipe?

P
A
C

7. On présente ci-contre les choix offerts sur le menu d'une rôtisserie.
   a. Combien de repas différents peut-on composer si l'on ne prend qu'un mets principal, un accompagnement et une sorte de légume?

   b. Si un repas est choisi au hasard, quelle est la probabilité :
      i. qu'il s'agisse d'une poitrine de poulet avec riz et macédoine?

      ii. de retrouver les côtes levées et les frites dans un même repas?



P
A
C

8. Dans un groupe de 30 athlètes, on choisit au hasard un athlète pour une épreuve de course à pied, un autre pour une épreuve de cyclisme sur route, un autre pour une épreuve de natation et un dernier pour une épreuve d'aviron. Combien y a-t-il de choix possibles?

P
A
C

9. Un code d'accès est formé de 6 lettres majuscules. Une même lettre peut être utilisée plus d'une fois.
   a. Quelle est la probabilité de trouver le code d'accès au hasard et du premier coup?

   b. Si l'on remplace une des lettres du code d'accès par un chiffre, augmente-t-on ou diminue-t-on le niveau de sécurité du code d'accès? Expliquez votre réponse.

P
A
C

10. Un sondage, dont l'échantillon est formé aléatoirement, est effectué dans l'école de Maya. Sachant que l'échantillon sera formé de 128 élèves et que l'école compte 1341 élèves, quelle est la probabilité que Maya :
    a. soit la dernière élève choisie pour faire partie de l'échantillon?

    b. soit une des élèves choisies pour faire partie de l'échantillon?

    c. ne soit pas choisie pour faire partie de l'échantillon?

11. Un appareil sélectionne aléatoirement 10 chansons différentes dans une liste de lecture en comptant 16.
   a. Combien de sélections différentes est-il possible d'obtenir?

   b. Quelle est la probabilité :
      i. que la cinquième chanson soit choisie en premier?

      ii. que la huitième chanson ne soit pas chosie?

12. Au Québec, en 2017, il existait 8 indicatifs régionaux : 418, 438, 450, 514, 579, 581, 819 et 873. Le premier chiffre qui suit l'indicatif régional doit être différent de 0 et de 1.
   a. Combien de numéros de téléphone pouvait-il y avoir au Québec en 2017?

   b. Trois personnes dont les numéros de téléphone ont des indicatifs régionaux différents se rencontrent. Quelle est la probabilité que ces trois personnes aient le même numéro de téléphone, à l'exception de l'indicatif régional?

13. On choisit, tour à tour, et aléatoirement, chacune des six pièces de monnaie illustrées ci-contre, afin de former un arrangement. Le côté, pile ou face, sur lequel chacune des pièces est déposée est déterminé aléatoirement.

   a. Si l'on tient compte uniquement de la valeur des pièces, combien d'arrangements sont possibles?

   b. Si l'on tient compte uniquement du côté apparaissant sur le dessus de chaque pièce, combien d'arrangements sont possibles?

   c. Si l'on tient compte à la fois de la valeur des pièces et du côté apparaissant sur le dessus de chaque pièce, combien d'arrangements sont possibles?

d. Quelle est la probabilité que :
   i. La pièce de 2 $ se trouve à la 5^{e} position?

   ii. Les pièces situées aux deux extrémités montrent le côté face?

   iii. La première pièce soit une pièce de 5 ¢ montrant le côté pile?

   iv. Les pièces se retrouvent en ordre croissant de valeur?

   v. Toutes les pièces montrent le même côté?

14. Le Groupe des huit ou G8 est un forum international de discussion et de partenariat économique formé des huit États ou pays parmi les plus puissants économiquement : l'Allemagne, le Canada, les États-Unis, la France, l'Italie, le Japon, le Royaume-Unis et la Russie. L'Union européenne y est aussi représentée.

    a. Si l'on place les neuf représentants côte à côte pour une photo officielle :
       i. de combien de façons différentes ces neuf personnes peuvent-elles se placer?

       ii. dans combien d'arrangements le premier ministre canadien se trouve-t-il à côté du premier ministre japonais?

    b. De combien de façons différentes peut-on placer les neufs drapeaux des États représentés au G8, si ces drapeaux sont disposés en cercle?

15. Huit écoles ont envoyé chacune un ou une élève pour la représenter à un concours de débat oratoire. Pour la première ronde de débats un contre un, les paires d'adversaires sont déterminées aléatoirement. Quelle est la probabilité que l'école A affronte l'école B lors de la première ronde?

16. Lors d'une partie de cartes, le jeu de 52 cartes est mélangé et des cartes sont distribuées aux quatre joueurs.

    a. Combien de mains différentes peuvent être créées :
       i. Si chaque joueur ou joueuse reçoit 6 cartes?

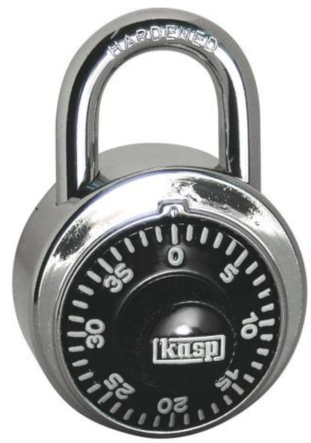
       ii. Si toutes les cartes sont distribuées?

b. Si l’on ajoute les 2 jokers, combien de mains différentes peuvent être créées :
   i. Si chaque joueur ou joueuse reçoit 6 cartes?

   ii. Si toutes les cartes sont distribuées sauf 2?

17. On présente ci-contre un cadenas à chiffres.
   a. Combien de combinaisons différentes de trois chiffres différents sont possibles sur ce genre de cadenas?

   b. Au sens mathématique du terme, le mot « combinaison » est-il correctement employé? Expliquez votre réponse.



18. Si 5 garçons et 5 filles se placent aléatoirement en file indienne, quelle est la probabilité qu’ils se placent de la manière suivante : GFGFGFGFGF?

19. Sous la forme la plus populaire, le sudoku est constitué d’une grille composée de 9 sections de 9 cases. Le but du jeu est de remplir cette grille avec les chiffres de 1 à 9 de telle sorte qu’un même chiffre ne figure qu’une seule fois sur une même ligne, dans uen même colonne ou dans une même case.

    De combien de façons différentes les chiffres 1 à 9 peuvent-ils être arrangés :
   a. sur une même ligne?

   b. sur une même colonne?

   c. dans une même case?

8. Formules de l'analyse combinatoire

On choisit k objets parmi n objets distincts. $(k \leq n)$

- Le nombre **d'arrangements avec répétitions** et donné par :
- Le nombre **d'arrangements sans répétition** est donné par :

Exemple : On veut former un mot de 3(k) lettres choisies parmi les 26(n) lettres de l'alphabet.

- Si on accepte les répétitions de lettres, on distingue au total _______ mots possibles.
- Si on n'accepte pas les répétitions de lettres, on distingue au total _______ mots possibles.

On choisit k objets parmi n objets distincts. $(k \leq n)$

- Le nombre **de combinaisons avec répétitions** et donné par :
- Le nombre **de combinaisons sans répétition** est donné par :

Exemple : On choisit successivement 3(k) cartes d'un jeu de 52(n) cartes.

- Si on choisit avec remise, on distingue _______ combinaisons avec répétitions.

- Si on choisit sans remise, on distingue _______ combinaisons sans répétitions.

Exercices

**Tous les exercices sont tirés des reproductibles de Vision aux éditions CEC ou de Mathématique 2000 aux éditions Guérin **

1) Un bijoutier range au hasard chacune de ces 4 pierres précieuses dans un compartiment de l'écrin illustré ci-contre.

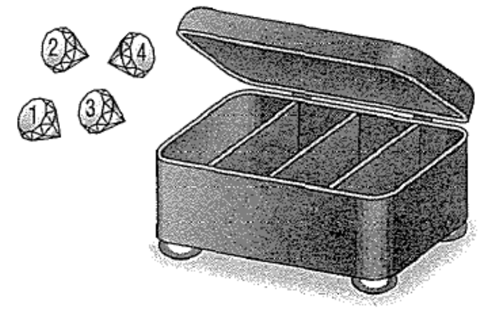
a) Combien y a-t-il de pierres disponibles pour:

1) le 1er compartiment? ________

2) le 2e compartiment? ________

3) le 3e compartiment? ________

4) le 4e compartiment? ________



b) De combien de façons différentes le bijoutier peut-il ranger ces 4 pierres?

c) Cette situation est-elle associée au concept de permutation, d'arrangement ou de combinaison? Expliquez votre réponse.

2) Ce même bijoutier range, une à une, 4 pierres précieuses choisies aléatoirement parmi les 7 pierres illustrées ci-contre dans les compartiments de ce même écrin.

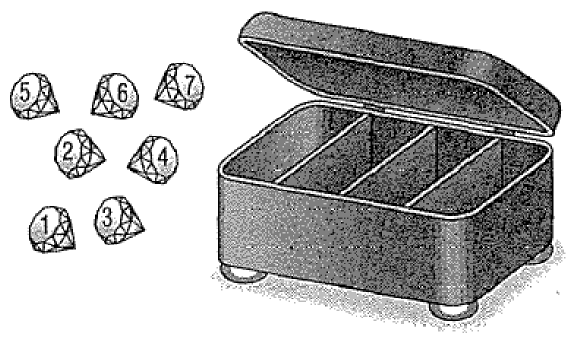
a) Combien a-t-il de choix de pierres pour:

1) le 1er compartiment? ________

2) le 2e compartiment? ________

3) le 3e compartiment? ________

4) le 4e compartiment? ________

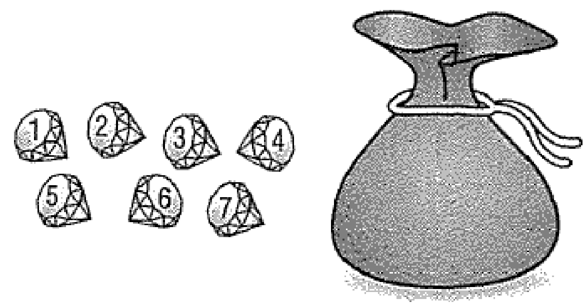


b) En quoi cette situation est-elle différente de la situation précédente?

c) Combien d'écrins pourrait-il utiliser si l'on considère que chacune des dispositions des mêmes pierres dans un autre ordre correspond à un écrin?

d) Cette situation est-elle associée au concept de permutation, d'arrangement ou de combinaison? Expliquez votre réponse.

3) Le bijoutier choisit, dans un certain ordre, 4 pierres parmi les 7 pierres illustrées ci-contre. Il les dépose dans un sac.



a) Cela aurait-il fait une différence s'il avait choisi les mêmes pierres dans un autre ordre? Expliquez *votre* réponse.

b) En quoi cette situation est-elle différente de la situation précédente?

c) De combien de façons différentes aurait-il pu choisir ces 4 pierres?

d) Combien de sacs différents contenant 4 pierres précieuses est-il possible de former?

e) Cette situation est-elle associée au concept de permutation, d'arrangement ou de combinaison? Expliquez votre réponse.

4) Lors d'un jeu télévisé, on propose à une participante de choisir 3 coffres parmi un total de 8 coffres. La participante ouvre les coffres choisis et gagne leur contenu. On s'intéresse ici au nombre de résultats possibles.

a) Dans ce contexte, l'ordre dans lequel elle a choisi les coffres a-t-il de l'importance? Expliquez votre réponse.

b) Cette situation est-elle associée au concept de permutation, d'arrangement ou de combinaison? Expliquez votre réponse.

c) Avant d'utiliser l'une ou l'autre des méthodes de dénombrement, qu'est-il important de déterminer?

d) Combien de choix possibles existe-t-il dans ce jeu?

5) L'entraineur des Canadiens de Montréal dispose de 4 ailiers gauches, de 4 centres et de 4 ailiers droits. Étant donné qu'une ligne d'attaque doit être constituée d'un ailier gauche, d'un centre et d'un ailier droit, combien de lignes d'attaque différentes peut-il former?

6) Déterminez le nombre d'arrière arrière-grands-parents qui se trouvent dans votre arbre généalogique.

7) Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses? Répondez sans l'aide de la calculatrice.

a) $2! + 2! = 4!$

b) $2! \times 3! = 6!$

c) $\frac{8!}{4!} = 2!$

d) $\frac{9!}{6!}$ est un entier.

e) $\frac{9!}{7!}$ est un entier pair.

f) $\frac{9!}{8!}$ est un entier impair.

8) A, B, C, D, E, ... , Z est l'ordre alphabétique connu. Avec ces 26 lettres, combien d'ordres alphabétiques différents aurait-on pu imaginer? *Arrondir au millième près.*

9) On considère trois objets distincts a, b et c. On veut en choisir deux.

a. Énumère tous les arrangements possibles avec répétition. ___________________

b. Énumère tous les arrangements possibles sans répétition. ___________________

c. Énumère toutes les combinaisons possibles avec répétition. __________________

d. Énumère toutes les combinaisons possibles sans répétition. __________________

10) Dans chaque situation, indique le modèle qui convient parmi les modèles suivants.

Modèle 1 : arrangement avec répétition — Modèle 2 : arrangement sans répétition

Modèle 3 : combinaison avec répétition — Modèle 4 : combinaison sans répétition

a. On observe, à la ligne d'arrivée, les trois premiers d'une course où participent dix concurrents. _________
b. On veut déterminer le nombre de façons de faire asseoir cinq personnes sur cinq chaises. __________
c. Chantal doit choisir trois amis, parmi une liste d'amis, pour les inviter à voir un film. __________
d. Roger doit emprunter deux livres à la bibliothèque. Il doit choisir parmi une liste de dix livres. __________
e. Janine choisit six numéros pour le prochain tirage à la loterie. __________
f. Caroline choisir 5 cartes, sans remise, dans un jeu de 52 cartes. _________
g. Jessica choisit 5 cartes, avec remise, dans un jeu de 52 cartes. _________
h. Un immeuble a trois ascenseurs. On recherche le nombre de façons de faire l'aller-retour en ascenseur. __________
i. On doit choisir trois personnes pour combler les postes de président, vice-président et trésorier, une personne ne pouvant occuper plus d'un poste. __________

11) Calcule la valeur des expressions suivantes

a) $5! =$ — b) $\frac{5!}{2!} =$ — c) $\frac{5!}{3!} =$

d) $\frac{100!}{98!} =$ — e) $\frac{6!}{4!\,2!} =$ — f) $\frac{10!}{7!\,3!} =$

12) Utilise la notation factorielle pour écrire les produits suivants.

a) $3 \times 2 \times 1 =$ ______ — b) $6 \times 7 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 =$ ______

c) $5 \times 4! =$ ______ — d) $8 \times 7 \times 6! =$ ______

e) $10 \times 3! \times 2! =$ ______ — f) $\frac{6}{3!} =$ ______

13) À partir de quelle valeur de n, $n!$ est-il supérieur à 1 000? ______

14) Simplifie le produit $n(n-1)!$. ______

15) Simplifie les quotients suivants.

a) $\frac{n!}{(n-1)!}=$______ b) $\frac{(n+2)!}{n!}=$ ____________________

16) Vrai ou faux?

a) $(3+2)! = 3! + 2!$ ___________ b) $(3-2)! = 3! - 2!$ ___________

c) $3! \times 2! = 6!$ ___________ d) $\frac{6!}{2!} = 3!$ ___________

17) Calcule la valeur des expressions suivantes.

a) $\frac{10!}{(10-2)!} =$ ____________________ b) $\frac{8!}{(6-1)!} =$ ________________________

c) $\frac{10!}{6!(6-2)!} =$ ____________________ d) $\frac{10!}{2!(10-2)!} =$ ________________________

18) Détermine la valeur des expressions suivantes.

a) $\frac{(5+2-1)!}{(5-1)!\,2!} =$ ____________________ b) $\frac{(6+4-1)!}{(6-1)!\ 4!} =$ ________________________

c) $\frac{(3+4-1)!}{(3-1)!\ 4!} =$ ____________________ d) $\frac{(1+5-1)!}{(1-1)!\ 5!} =$ ________________________

19) Soit $A_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$ où $k \leq n$. Détermine la valeur des expressions suivantes.

a) $A_2^5 =$ __________ b) $A_3^5 =$ __________ c) $A_0^n =$ ___________

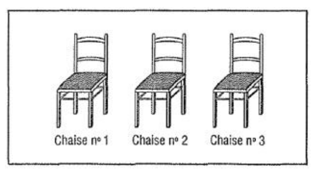
d) $A_1^n =$ __________ e) $A_n^n =$ __________ f) $A_{n-1}^n =$ __________

20) Soit $C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ où $k \leq n$. Détermine la valeur des expressions suivantes.

a) $C_2^5 =$ __________ b) $C_3^5 =$ __________ c) $C_3^{10} =$ ___________

d) $C_7^{10} =$ __________

21) Trois personnes, André, Bernard et Claude, veulent s'asseoir sur une des trois chaises alignées.



a. Si les trois personnes sont debout,
   i. combien de choix André a-t-il de s'asseoir? _________
   ii. Si André s'assoit, combien de choix Bernard a-t-il de s'asseoir? _________
   iii. Si André et Bernard s'assoient, combien de choix reste-il à Claude de s'assoir? _________

b. Quel est le nombre total de façons de faire asseoir ces trois personnes? _____________

c. Dresse la liste qui illustre les différentes façons de faire asseoir ces trois personnes.

____

22) Combien y a-t-il de façons de faire asseoir :

a. Quatre personnes sur quatre chaises alignées? ______________________________

b. Cinq personnes sur cinq chaises alignées? ________________________________

c. n personnes sur n chaises alignées? ______________________________________

23) Huit nageurs participent à l'épreuve finale du 100 mètres de style libre. Combien de résultats différents peut-on observer à l'arrivée? ____

24) De combien de façons différentes peut-on disposer cinq livres districts sur une étagère? ______

25) De combien de façons différentes peut-on faire asseoir cinq personnes sur cinq chaises alignées :

a. Si deux personnes veulent s'asseoir côte à côte? ____________________________

b. Si deux personnes ne veulent pas s'asseoir côte à côte? _______________________

26) Trois garçons et deux filles doivent s'asseoir sur cinq chaises alignées. De combien de façons peut-on les faire asseoir :

a. Si les garçons veulent s'asseoir les uns à côté des autres? ____________________

b. Si les deux filles veulent s'asseoir ensemble? _____________________________

c. Si les garçons veulent s'asseoir les uns à côté des autres et s'il en est de même pour les filles? ____

27) Quatre Américains, cinq Canadiens et trois Français s'assoient sur des chaises alignées. De combien de façons peuvent-ils s'asseoir si les personnes de même nationalité s'assoient les unes à côté des autres?

____

28) Un étudiant doit choisir huit questions dans un examen qui en comporte dix. Combien y a-t-il de choix possibles? ______________________________

29) On veut constituer un comité de quatre personnes à partir d'un groupe de dix personnes admissibles. Combien y a-t-il de comités possibles? ______________________________

30) Lors d'un sondage, on prélève, au hasard et sans remise, un échantillon de 10 personnes parmi les 30 employés d'une entreprise. Combien y a-t-il d'échantillons possibles? ______________

31) Indique la formule qui donne le nombre de résultats possibles lorsqu'on choisit k objets parmi n objets distincts ($k \leq n$) si :

a. On tient compte de l'ordre et qu'on permet les répétitions. ______________________

b. On tient compte de l'ordre et qu'on ne permet pas les répétitions. ________________

c. On ne tient pas compte de l'ordre et qu'on permet les répétitions. ________________

d. On ne tient pas compte de l'ordre et qu'on ne permet pas les répétitions. ___________

32) Une urne renferme 10 jetons numérotés de 1 à 10. On y choisit successivement quatre jetons. Combien de résultats possibles peut-on observer si :

a. On tient compte de l'ordre et on tire avec remise? ______________________________

b. On tient compte de l'ordre et on tire sans remise? ______________________________

c. On ne tient pas compte de l'ordre et on tire avec remise? ______________________

d. On ne tient pas compte de l'ordre et on tire sans remise? ______________________

33) À partir d'un groupe de dix candidats, on veut créer un conseil d'administration de quatre personnes pour occuper respectivement les postes de président, de vice-président, de trésorier et de secrétaire. On s'interroge sur le nombre de conseils d'administration possibles.

a. Cette situation suggère-t-elle de tenir compte de l'ordre? ______________________

b. Dans ce contexte, un individu peut-il occuper deux postes différents dans le conseil d'administration? ______________________________

c. Indique le modèle qui convient à cette situation. ______________________________

d. Combien y a-t-il de conseils d'administration possibles? ______________________

34) À partir d'un groupe de dix candidats, on veut créer un comité de quatre membres. On s'interroge sur le nombre de comités possibles.

a. Cette situation suggère-t-elle de tenir compte de l'ordre? ____________________________

b. Peut-on choisir deux fois le même individu pour faire partie de ce comité? ____________

c. Indique le modèle qui convient à cette situation. _____________________________________

d. Combien y a-t-il de comités possibles? ____

35) On veut former un jury de trois hommes et deux femmes choisis parmi quatre hommes et quatre femmes.

a. De combien de façons peut-on choisir les hommes qui font partie du jury?

____

b. De combien de façons peut-on choisir les femmes qui font partie du jury?

____

c. Combien y a-t-il de jurys possibles? ____

36) On veut constituer une délégation de quatre Américains, trois Canadiens et deux Français choisis parmi six Américains, cinq Canadiens et quatre Français. Combien y a-t-il de délégations possibles?

____

37) On choisit au hasard 1 carte dans un jeu de 52 cartes.

a. Combien y a-t-il de résultats possibles? ____

b. Combien y a-t-il de façons de tirer :

i. Un pique? ____

ii. Un valet? ____

iii. Un valet de pique? ____

38) Simultanément, on choisit au hasard 4 cartes dans un jeu de 52 cartes.

a. Combien y a-t-il de résultats possibles? ____

b. Combien y a-t-il de façons de tirer :

i. Quatre piques? ____

ii. Quatre valets? ____

iii. Un seul valet? ____

iv. Le valet de pique? ____

39) Une urne contient dix boules : quatres noires et six rouges. Les boules rouges sont numérotées de 1 à 6 et les boules noires de 7 à 10. On tire simultanément deux boules de l'urne.

a. Combien y a-t-il de résultats possibles? ______________________

b. Combien y a-t-il de façons de tirer :

   i. Une seule boule rouge? ______________________

   ii. Aucune boule rouge? ______________________

   iii. Deux boules rouges? ______________________

   iv. Au moins une boule rouge? ______________________

40) Lors d'un examen, on doit répondre à 10 des 12 questions.

a. Combien y a-t-il de choix possibles? ______________________

b. Combien y a-t-il de choix si les trois premières questions sont obligatoires? __________

____

41) Un ensemble renferme dix éléments distincts.

a. Combien de paires peut-on former à partir de ces éléments? ______________________

b. Combien de sous-ensembles de trois éléments peut-on former? ______________________

42) Une classe est composée de six garçons et quatre filles.

a. De combien de façons peut-on choisir quatre élèves? ______________________

b. Combien de ces choix comportent :

   i. Une seule fille? ______________________

   ii. Aucune fille? ______________________

   iii. Au moins une fille ? ______________________

43)

a. Détermine le nombre de mots de trois lettres distinctes que l'on peut former avec les lettres du mot FRANCE. ______________________

b. Combien de ces mots contiennent seulement des consonnes ? ______________________

c. Combien de ces mots commencent par la lettre F? ______________________

d. Combien de ces mots commencent par la lettre F et se terminent par la lettre E ?

____

e. Combien de ces mots contiennent la lettre A? ______________________

44) Parmi les 12 personnes admissibles, 4 personnes doivent être choisies afin de former une délégation pour assister à un congrès.

a. De combien de façons peut-on former cette délégation? ____________________

b. De combien de façons peut-on former cette délégation si deux personnes refusent d'assister au congrès ensemble? ____________________

c. De combien de façons peut-on former cette délégation si deux personnes ne peuvent assister au congrès qu'ensemble? ____________________

45) Lors d'un examen, tu dois répondre à sept questions sur dix.

a. Combien de choix as-tu? ____________________

b. Combien de choix as-tu si les deux premières questions sont obligatoires?

____

c. Combien de choix as-tu si tu dois répondre à la première ou à la seconde question mais pas aux deux? ____________________

d. Combien de choix as-tu si tu dois répondre à exactement deux des trois premières questions? ____________________

e. Combien de choix as-tu si tu dois répondre à au moins deux des trois premières questions? ____________________

46) Tu as six amis.

a. Combien de possibilités as-tu pour inviter quatre de tes amis à dîner?

____

b. Combien de possibilités as-tu si deux d'entre eux ne peuvent venir qu'ensemble?

____

c. Combien de possibilités as-tu si deux d'entre eux ne peuvent être invités ensemble?

____

47) Cinq élèves sont admissibles afin de participer à un concours de mathématiques. De combien de façons leur professeur peut-il choisir un ou plusieurs de ces élèves pour participer à ce concours?

____

48) Trois filles et trois garçons se présentent devant un tourniquet du métro; une seule personne à la fois peut le franchir. Ces filles et ces garçons ne se connaissent pas, et l'ordre dans lequel ils sont arrivés a été déterminé par le hasard. Quelle est la probabilité que :

a. Les garçons et les filles alternent?

b. toutes les filles passent en premier?

c. La première et la dernière personne soient des garçons?

49) Aux Jeux olympiques de Beijing, il y avait 8 participantes à la finale du 100 m en athlétisme. De combien de manières différentes le podium, accueillant les médaillées d'or, d'argent et de bronze, pouvait-il être occupé?

____

50)

a. De combien de façons différentes la sélection des trois étoiles, la première, la deuxième et la troisième, d'une partie de hockey peut-elle se faire? On suppose qu'il y a 20 joueurs par équipe.

____

b. Si cette sélection se fait au hasard, quelle est la probabilité que les trois étoiles choisies fassent partie de la même équipe?

____

51) Pour former une équipe de « Génies en herbe », une enseignante doit choisir 8 élèves parmi son groupe, qui compte 13 garçons et 16 filles. Combien d'équipes différentes peut-elle former si :

a. Les membres de cette équipe sont choisis au hasard?

____

b. L'Équipe doit compter autant de garçons que de filles, et que chaque garçon et chaque fille sont choisis au hasard?

____

52) Pour procéder au tirage d'une certaine loterie, on installe 4 bouliers contenant chacun 9 boules numérotées de 1 à 9. On tire une boule de chacun des bouliers pour déterminer la séquence gagnante de 4 chiffres. Pour accélérer le tirage, on suggère de mettre 4 boules « 1 », 4 boules « 2 », 4 boules « 3 », et ainsi de suite jusqu'à 4 boules « 9 » dans un seul boulier, puis de tirer successivement 4 boules pour déterminer la séquence gagnante. Bien que ce dernier procédé génère toutes les séquences que l'autre méthode fournit, montrez qu'il serait injuste parce que les possibilités produites n'ont pas toutes la même probabilité d'être choisies comme séquence gagnante.

53) Un club de raquettes compte 10 hommes et 10 femmes. Déterminez le nombre de rencontres de double mixte que l'on peut organiser au badminton. Dans une rencontre de double mixte, il y a autant d'hommes que de femmes sur le terrain.

Réponses des exercices

1. a) 1) 4 2) 3 3) 2 4) 1
   b) 24 façons
   c) Permutation, car il faut trouver toutes les façons de placer les éléments d'un ensemble de 4 éléments
2. a) 1) 7 2) 6 3) 5 4) 4
   b) Les éléments sont choisis dans un ensemble de départ comportant plus de 4 éléments.
   c) 840 écrins
   d) Arrangement, car il s'agit de trouver en tenant compte de l'ordre, le nombre d'ensemble de 4 éléments parmi un ensemble de 7 éléments.
3. a) Non, car dans le sac, les pierres ne sont pas ordonnées.
   b) Les ensembles constituées des mêmes pierres sont identiques.
   c) 24 façons
   d) 35 sacs
   e) Combinaison, car il s'agit de trouver, sans tenir compte de l'ordre, le nombre d'ensemble de 4 éléments choisis parmi 7 éléments.
4. a) Non, le contenu des valises ne changera pas, peu importe l'ordre d'ouverture.
   b) Combinaison, car l'ordre importe peu.
   c) S'il faut tenir compte de l'ordre
   d) 56 choix
5. 64 lignes
6. 16 arrière arrière-grands-parents
7. FAUX : a,b,c VRAI : d,e,f
8. $\approx 4{,}033 \times 10^{26}$ alphabets
9. a) aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc
   b) ab, ac, ba, bc, ca, cb
   c) ab, ac, bc, aa, bb, cc
   d) ab, ac, bc
10. a) 2 b) 2 c) 4 d) 4 e) 4 f) 4 g) 3 h) 1 i) 2
11. a) 720 b) 60 c) 20 d) 9 900 e) 15 f) 120
12. a) 3! b) 7! c) 5! d) 8! e) 5! f) 1
13. 7
14. n!
15. a) n b) (n + 2)(n + 1)
16. a) Faux b) faux c) faux d) faux
17. a) 90 b) 336 c) 210 d) 45
18. a) 15 b) 126 c) 15 d) 1
19. a) 20 b) 60 c) 1 d) n e) n! f) n!
20. a) 10 b) 10 c) 120 d) 120
21. a) i. 3 ii. 2 iii. 1 b) 6 c) ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA
22. a) 24 façons b) 120 façons c) n! façons
23. 40 320 résultats différents
24. 120 façons
25. a) 48 façons b) 72 façons

26. a) 36 façons b) 48 façons c) 24 façons
27. 103 680 façons
28. 45 choix possibles
29. 210 comités
30. 30 045 015 échantillons
31. a) n^k b) $\frac{n!}{(n-k)!}$ c) $\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$ d) $\frac{n!}{k!(n-k)!}$
32. a) 10 000 résultats b) 5040 résultats c) 715 résultats d) 210 résultats
33. a) oui b) non c) arrangement sans remise d) 5 040 conseils d'administration
34. a) non b) non c) combinaison sans remise d) 210 comités
35. a) 4 façons b) 6 façons c) 4 × 6 = 24 façons
36. 900 délégations
37. a) 52 résultats b) i) 13 ii) 4 iii) 1
38. a) 270 725 résultats b) i) 715 façons ii) 1 façon iii) 69 184 façons iv) 20 825 façons
39. a) 45 résultats b) i) 24 façons ii) 6 façons iii) 15 façons iv) 24 + 15 = 39 façons
40. a) 66 choix b) 36 choix
41. a) 45 paires b) 36 sous-ensembles
42. a) 210 façons b) i) 80 choix ii) 15 choix iii) 210 – 15 = 195 choix
43. a) 120 mots b) 24 mots c) 20 mots d) 4 mots e) 60 mots
44. a) 495 façons b) 450 façons c) 255 façons
45. a) 120 choix b) 56 choix c) 56 choix d) 63 choix e) 98 choix
46. 15 possibilités b) 7 possibilités c) 9 possibilités
47. 31 façons
48. a) $\frac{1}{10}$ b) $\frac{1}{20}$ c) $\frac{1}{5}$
49. 336 podiums différents
50. a) 59 280 façons b) $\frac{3}{13}$
51. a) 4 292 145 équipes b) 1 301 300 équipes
52. Démarche : Si la combinaison gagnante est (1, 2, 3, 4)

    1[re] situation : $P\big((1,2,3,4)\big) = \frac{1}{9} \times \frac{1}{9} \times \frac{1}{9} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{6561} \approx 0{,}00015245\ldots$

    2[e] situation : $P\big((1,2,3,4)\big) = \frac{4}{36} \times \frac{4}{36} \times \frac{4}{36} \times \frac{4}{36} \approx \frac{256}{1\,413\,720} \approx 0{,}000180\ldots$

    On voit que la probabilité de gagner n'est pas la même dans les deux situations.
53. 4 050 rencontres